

د. أسعد الجنابي

المنطق غير التقليدي وتطبيقاته

نظري وتمارين محلولة



المنطق

غير التقليدي وتطبيقاته

د. أسعد قادر الجنابي

المنطق
غير التقليدي وتطبيقاته
نظري وتمارين محلولة

♦ المنطق غير التقليدي و تطبيقاته.
نظري وتمارين محلولة.

- تأليف: د. أسعد قادر الجنابي.
- سنة الطباعة: 2010.
- عدد النسخ: 1000 نسخة.
- الترقيم الدولي: ISBN: 978-9933-18-006-5

يطلب الكتاب على العنوان التالي:

دار علاء الدين
للنشر والطباعة والتوزيع
سوريا ـ دمشق ـ جرمانا
هاتف: 00963 11 5617071
فاكس: 00963 11 5613241
ص. ب: 30598
daraladdinsyria@gmail.com

دار مؤسسة رسلان
للطباعة والنشر والتوزيع
سوريا ـ دمشق ـ جرمانا
هاتف: 00963 11 5627060
00963 11 5637060
فاكس: 00963 11 5632860
ص. ب: 259 جرمانا
darrislansyria@gmail.com

وفـــاءً لذكرى

السيدة زويــا ميخائيلينكو

لدورها الكبير في مسيرة دار علاء الدين

.

المحتويات

الاستلزام الدقيق ومضادات الواقع

Strict Implication And Counterfactuals

منطق المحمولات الجهوي

Modal Predicate Logic

المنطــق المــرن

Fuzzy Logic

مدخـل

يمثل هذا الكتاب مدخلاً إلى المنطق غير التقليـدي وتطبيقاتـه. والمنطـق التقليـدي هو الذي يصح فيه مبدأ الثالث المرفوع، أي أن القضية تكون صادقة أو كاذبة ولـيس ثمـة قيمة صدق أخرى، ولهذا سمي أيضاً المنطق ثنائي القيم. وهذا المنطق يدرسه عادة الطلبة المبتدئون في الجامعات العربية. ولكننا نرى أنه مـن المهـم، بـل مـن الـلازم أن تبـدأ هـذه الجامعات بإصلاح تـدريس المنطـق فيهـا، ومواكبـة الجامعـات العالميـة، وذلـك بتـدريس المنطق غير التقليدي لأهميته في الفلسفة والرياضيات وعلوم الحاسوب.

إن المنطق غير التقليـدي يكـون توسـيعاً للمنطـق التقليـدي إذا أضـيفت مفـردات لغوية جديدة لمفردات المنطق التقليدي، كما في منطق الجهة حيث تضاف (من الضروري أن)، (من الممكن أن) وتضاف (دائماً سيكون الحال أن)، (أحياناً يكون الحال أن) في منطق الزمن وتضاف (من المعـروف أن)، (مـن المعتقـد أن) في منطقـي المعرفـة والاعتقـاد عـلى الترتيب، وتضاف (مـن الـلازم أن)، (مـن المـسموح أن) في منطـق الأخـلاق. وبرفقـة هـذه الإضافات تدخل بديهيات أو قواعد اشتقاق لتغطيتها.

إن المنطق غير التقليدي يكون بديلاً للمنطق التقليدي إذا امتلك المفردات اللغوية نفسها للمنطـق التقليـدي ولكـن ببـديهيات أو قواعـد اشـتقاق مختلفـة. ويمثـل المنطـق المتعدد القيم والمنطق الحدسي والمنطق المرن أمثلة على هذا المنطق غير التقليدي.

يخصص الفصل الأول لمنطـق قـضايا الجهـة أو منطـق الـضرورة والإمكانيـة، ويظهر هنا المنطق غير التقليدي، كتوسيع للمنطق التقليدي، لأننا في إطـار المنطـق التقليدي الذي يستخدم جداول الصدق لدراسـة دلالتـه لا نـستطيع دراسـة دلالـة القضايا التي تتصدرها الكلمات: من الضروري، مـن الممكـن. قمنـا في هـذا الفـصل

بدراسة دلالة مثل تلك القضايا، وذلك باستخدام نماذج كريبكة، حيث يحدد صدق وكذب الصيغ في عوالم ممكنة أخرى بالإضافة إلى العالم الواقعي. ولقد استخدمنا المخططات لتسهيل عملية فهم المادة المعروضة، لا سيما العلاقة الثنائية التي ترتبط بواسطتها العوالم الممكنة بعضها ببعض. وبعد أن أعطينا تعريف صدق الروابط، أعطينا أمثلة عديدة لإيجاد قيم صدق الصيغ المركبة، باستخدام تعريفي مؤثر الضرورة L ومؤثر الإمكانية M. إن أهمية هذا الفصل تكمن في كون الفصلين السادس والسابع يمثلان تطبيقات له. كما برهنا باستخدام نماذج كريبكة أن خواص العلاقة الثنائية تجد تعبيرها بواسطة صيغ معينة.

تدخل أشجار الصدق الموجهة - الفصل الثاني - كوسيلة أخرى لدراسة دلالة المنطق غير التقليدي ولتحديد صحة الحجج. في هذا الفصل تدخل 4 قواعد اشتقاق جديدة على أشجار الصدق في منطق القضايا التقليدي (غير الجهوي) وهي قواعد: الضرورة ونفيها والإمكانية ونفيها. تستخدم أشجار الصدق كأداة بديلة لنماذج كريبكة، يجري تطويرها عبر فصول الكتاب، حيث تكون أكثر سلاسة من تلك النماذج.

الفصل الثالث مخصص لبناء الأنساق العادية لمنطق قضايا الجهة، وهي الأنساق: K، T، D، S_4، S_5، B، ويبرهن أن K أساسها وأن الأنساق الأخرى هي توسيعات إلى K، حيث تستخدم أشجار الصدق الموجهة لبرهان ذلك. وتعطى العديد من مبرهنات هذه الأنساق.

يغطي الفصل الرابع، الاستلزام الدقيق ومضادات الواقع. تبدأ دراسات الاستلزام الدقيق بتبيان أفضليته على الاستلزام التقليدي (المادي)، ويمكن تعريفه باستخدام مفهوم الضرورة. أما تحديد صحة الصيغ وصحة الحجج فيتم عن طريق أشجار الصدق الموجهة ولهذا الغرض تدخل قاعدتان تتعلقان بالاستلزام الدقيق وقاعدتان تتعلقان بالاستلزام الثنائي الدقيق. وأخيراً، يبنى نسق الاستلزام الدقيق. أما مضادات الواقع فتوضح أولاً أفضلياتها على الاستلزام الدقيق، ثم يتم إعطاء تعريف صدق صيغها باستخدام العوالم الممكنة، يدخل مفهوم العوالم الممكنة القريبة الشبه من العالم الواقعي.

في الفصل الخامس يتم توسيع منطق قضايا الجهة إلى منطق المحمـولات الجهـوي، حيث تضاف قواعد جديدة لقواعد أشجار الصدق الجهويـة الـسابقة، لتغطيـة المكممـين: الكلي والجزئي. أما توسيع هذا المنطق ليشمل مفهـوم الهويـة، فيتطلـب إضـافة قاعـدتين اثنتين.

منطـق الـزمن ومنطـق الأخـلاق تـتم مناقـشتهما وبنـاؤهما في الفـصل الـسادس كتطبيقين لمنطق الجهة، فيعرض الزمن على أنه تتابع مرتب خطياً من اللحظـات الزمنيـة، التي تمثل العوالم الممكنة. يدرس تركيب هـذا المنطـق بإضـافة المـؤثرين الـزمنيين G و H ليقـابلا المـؤثر الجهـوي L وإضـافة المـؤثرين الـزمنيين F وP ليقـابلا المـؤثر الجهـوي M. تستخدم نماذج كريبكة لدراسة دلالة منطق الزمن، حيث تمثل (قبـل) العلاقـة الثنائيـة في هذه النماذج. لبناء منطق الأخلاق يضاف مؤثران هما مؤثر الإلزام ليقابل المـؤثر الجهـوي L، ومؤثر السماح ليقابل M. تعطى قواعد صدق الـروابط في كـل مـن المنطقـين وتـبرهن بعض المبرهنات.

منطق المعرفة ومنطق الاعتقاد تتم دراستهما في الفصل الـسابع كتطبيقـين آخـرين لمنطق الجهة، حيث يتم إدخـال المـؤثرين K ليعنـي (مـن المعـروف أن) وB ليعنـي (مـن المعتقد أن)، ليقابلا المؤثر الجهوي L. الخيارات المعرفيـة تمثـل العـوالم الممكنـة في منطـق المعرفة وتتم دراسة أوجه التشابه والاختلاف بين المنطقين.

الفصل الثامن مخصص لدراسـة المنطـق الحـدسي. في هـذا المنطـق، يـتم اسـتبدال مفهوم الصدق، الذي يمثل المفهوم المركزي للدلالة عادة بمفهوم البرهان. وهكذا، فالقـضية الصادقة عند الحدسـيين هـي القـضية المبرهنـة، والقـضية الكاذبـة عنـدهم هـي القـضية المدحضة. تستخدم أشجار الصدق الجهوية بعد تحويرها لدراسة دلالـة المنطـق الحـدسي، فتعطى 5 قواعد اشتقاق لهذه الأشجار، ثم يبنى نسق كامل لهذا المنطق.

يعرض المنطق المتعدد القـيم في الفـصل التاسـع، حيـث تثبّـت الأسـباب التـي تدفع بالكثير من المناطقة لتبنيه، لنصل إلى المنطق ثلاثي القيم فندرس: دلالة بوشفار، كلين، لوكاتشيفتج. تـتم مقارنـة هـذه الـدلالات مـع بعـضها الـبعض. يعمـم المنطـق الثلاثي القيم إلى المنطق المتعدد القيم، حيث تعطـى العلاقـات التـي يـتم بواسـطتها

تعريف الروابط. يربط هذا المنطق المتعدد القيم بالمنطق اللانهائي أو المتصل الذي هو موضوع الفصل الأخير.

موضوع الفصل العاشر هو المنطق المرن الذي نعتبره التعميم الأخير للمنطق، ويكون بديلاً للمنطق الثنائي القيم. والحقيقة، أن المنطق المرن يمثل ثورة في هذا المجال، حيث أنه يعكس بدقة أكثر التفكير البشري ويسمح بتطبيقات أوسع في مجالات عدة. وبما أن المنطق المرن يؤسس على المجموعات المرنة، فلقد قمنا بدراسة هذه الأخيرة باختصار وباستخدام الأمثلة التوضيحية، حيث تدرس العلاقات والعمليات على المجموعات المرنة. تناقش الموضوعات الرئيسة للمنطق المرن وهي: المتغيرات اللغوية، والمحورات اللغوية، وقواعد الاشتقاق المرنة والاستدلال المرن للقضايا غير الدقيقة.

أخيراً نود أن نشكر الأستاذ "بوشيخي الشيخ" على جهده في مراجعة الكتاب والآنسة عزاش أمينة التي تحملت عناءً كبيراً من أجل التنضيد الضوئي له.

مقدمة رياضية

عندما يعالج المنطق بشكل معاصر، فإن استخدام بعض المفاهيم الرياضية، يـصبح شيئاً لا يمكننا تجنبـه. ومـع ذلـك، فـإن هـذه المفـاهيم تـستخدم بحـدها الأدنى، ومفيـدة للقارئ غير المطلع عليها. سنعرض بشكل مختصر لبعض العلاقات والعمليات الأولية عـلى المجموعات، وكذا مفهوم الدالة. ويستطيع القـارئ الرجـوع إليهـا فقـط، عنـدما يحتاجهـا أثناء قراءته للكتاب.

1. المجموعات والعلاقات على المجموعات:

المجموعة مفهوم أولي (لا يعرَّف) ويمكـن وصـفه بواسـطة الأمثلـة: مجموعـة دول العالم، مجموعة الأعداد الطبيعية. تسمى الأشياء التي تتـألف منهـا مجموعـة مـا بعنـاصر هذه المجموعة، فالعدد 4 هو عنصر من مجموعة الأعداد الطبيعية. وتتعين مجموعـة مـا A بكتابة عناصرها بين قوسين من النوع { }، وتوضـع فواصـل بـين العنـاصر. يمكـن كتابـة المجموعة، وذلك بذكر الصفة المميـزة التـي يتمتـع بهـا كـل عنـصر مـن هـذه المجموعـة كالتالي: A={x/P(x)}، حيث إن المتغير x يمثل أي عنصر من المجموعة A والخط المائـل / يعني حيث، و P(x) تعني تحقُـق خاصـية أو خـواص معينـة فمـثلاً، إذا كانـت { 1, 4, 9, 16}=A، فإنه يمكن كتابتها على الشكل:

A={x/P(x) ≡ 1, 2, 3, 4 مربع الأعداد x}

إن المجموعة التي ليس لهـا أي عنـصر تـسمى المجموعـة الخاليـة، ويرمـز لهـا بواسـطة ϕ. إذا كانـت المجموعـة A={a, b, c}، فإننـا نقـول إن العنـصر a ينتمـي

إلى المجموعة A، ونرمز لذلك بواسطة $a \in A$ (الرمز $\in$ يقرأ: ينتمي إلى، أو عنصر من).

أما إذا كان العنصر لا ينتمي إلى المجموعة A، فإننا نرمز لذلك بواسطة $a \notin A$. وإذا كانت المجموعة $B=\{a, c\}$، فإننا نلاحظ أن كلاً من عناصر B ينتمي إلى المجموعة A، فنقول إن المجموعة B محتواة في (متضمنة في) المجموعة A، ونرمز لذلك بواسطة $B \subseteq A$. وإذا كانت $A \subseteq B$، ولكن A غير محتواة في B، فإننا نقول إن B محتواة تماماً في A، وعندها نكتب $B \subset A$. وهذا يعني وجود عنصر واحد على الأقل ينتمي إلى A ولا ينتمي إلى B. إذا كانت $B \subseteq A$، فإننا نقول كذلك إن B مجموعة جزئية منها، وإذا كانت $B \subset A$ فإننا نقول إن B مجموعة جزئية فعلية من A. المجموعتان A و B تكونان متساويتين ونكتب $A = B$، إذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. المجموعة الخالية ϕ محتواة في أي مجموعة أخرى مهما كانت. المجموعة U التي تحقق الشرط $A \subseteq U$ تسمى مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعة A. نشير إلى أن $\subseteq$، $\subset$، $=$ هي علاقات على المجموعات.

2. العمليات على المجموعات:

أ) الاتحاد: اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة تحوي العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B، ونرمز لهذا الاتحاد بواسطة $A \cup B$. وهكذا فإن $a \in A \cup B$ إذا و فقط إذا كان $a \in A$ أو $a \in B$.

ب) التقاطع: تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة تحوي العناصر، التي تنتمي إلى A و إلى B، ونرمز لهذا التقاطع بواسطة $A \cap B$. وهكذا فإن $a \in A \cap B$ إذا و فقط إذا كان $a \in A$ و $a \in B$.

ج) الإكمال: المجموعة المكملة إلى A بالنسبة إلى B هي مجموعة تحوي كل العناصر التي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A، ونرمز لها بواسطة $B-A$. وهكذا، فإن $a \in B - A$ إذا وفقط إذا كان $a \in B$ و $a \notin A$ ، $\notin$ يقرأ: لا ينتمي.

مثال:

لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية، E هي مجموعة الأعداد الزوجية، O هي مجموعة الأعداد الفردية. إذاً $E \cup O = N$، $E \cap O = \phi$. ولتكن $C = \{x/x \geq 8\}$ إذاً، $E - C = \{0, 2, 4, 6\}$.

3. الجداء الديكارتي والعلاقات الثنائية:

عندما تكون لدينا مجموعتان ثم نقوم بربط كل عنصر من المجموعة الأولى مع كل عنصر من المجموعة الثانية، فإننا نشكّل نوعاً جديداً من الأشياء: الزوج المرتب.

مثال:

لتكن $A = \{1, 2\}$، $B = \{2, 3\}$. عناصر المجموعة $A \times B$ هي الأزواج المرتبة:

$$A \times B = \{(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)\}$$

وبشكل عام، نعرّف $A \times B$، الذي نسميه الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B كالتالي:

$$A \times B = \{(a,b) \;/\; a \in A, b \in B\}$$

أي أن الجداء الديكارتي $A \times B$ هو مجموعة من أزواج مرتبة، تكون مركبتها الأولى من المجموعة A ومركبتها الثانية من المجموعة B، ويعتبر الجداء عملية على المجموعات.

العلاقة الثنائية R من المجموعة A إلى المجموعة B، هي أي مجموعة جزئية من المجموعة $A \times B$، أي أن $R \subseteq A \times B$، ولذلك تكون عناصر العلاقة R هي أزواج مرتبة أيضاً. إذا كان $(x, y) \in R$، فإننا نعبر عن ذلك بالشكل xRy، ونعني بذلك أن المركبة x ترتبط بالمركبة y بواسطة العلاقة R، وإذا كان $(x, y) \notin R$، فإننا نكتب xRy.

الدالة من A إلى B هي علاقة ثنائية f بين A و B، بحيث أنه لكل x، حيث $x \in A$ يوجد عنصر وحيد y، حيث $y \in B$ و xfy.

أمثلة: $(2,3) \neq (3,2)$، لأن الزوجين يمتلكان العناصر نفسها، ولكن بترتيب مختلف.

لتكن N مجموعة أعداد. إذاً، $N \times N$ هي مجموعة كل الأزواج المرتبة على الشكل

(n,m)، حيث n و m ينتميان إلى N. إذا كانت $R = \{(2,3), (3,2)\}$ فإن $R \subseteq N \times N$، وإن R هي علاقة ثنائية بين N ونفسها. إذا كانت $f=\{(n,n^2) \ / \ n \in N\}$ فإن f دالة من أعداد إلى أعداد (دالة عددية) وإن $f(n) = n^2$.

الفصل الأول

منطق قضايا الجهة

Modal Propositional Logic

قبل أن نقوم بدراسة منطق قضايا الجهة تركيباً ودلالة، سنقوم بمراجعة تركيب ودلالة لغة حساب القضايا التقليدي.

1.1 تركيب لغة حساب القضايا التقليدي:

تتكون أبجدية لغة حساب القضايا التقليدي من:

- الحروف اللاتينية الكبيرة: وهذه الحروف ودلائلها... $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots$ وندعوها بالمتغيرات القضائية.

- رموز الدوال المنطقية (الروابط): $\urcorner$ (النفي)، $\wedge$ (الوصل)، $\vee$ (الفصل)، $\rightarrow$ (الاستلزام)، $\leftrightarrow$ (الاستلزام الثنائي).

- القوسان (و) وهما قوس الفتح وقوس الإغلاق على الترتيب.

وهكذا فإن أبجدية لغة حساب القضايا التقليدي تتكون من:

$$A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots، \urcorner، \wedge، \vee، \rightarrow ، \leftrightarrow، (،)$$

إن تركيب (نحو) لغة حساب القضايا يعرف بواسطة القواعد التالية لبناء الصيغ وهي:

(1) كل متغير قضائي يكون صيغة.

(2) إذا كانت α و β صيغتين فإن كلاً مما يأتي يكون صيغة.

$$\urcorner \alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

(3) أي تتابع آخر من الرموز لا يكون صيغة.

يتم تكوين الصيغ المركبة من الصيغ البسيطة أو الذرية (وهـي الـصيغ التـي لـيس فيها رابط) بواسطة تكرار تطبيق القاعدة (2). وهكذا فمثلاً بواسطة القاعدة (1) نـرى أن K وL صيغتان ذريتان. وينتج عن هذا وبواسـطة القاعـدة (2) أن $(K \Lambda L)$ صـيغة. وإذاً بواسطة القاعدة (2) أيضاً تكون $\rceil (K\Lambda L)$ صيغة. كمثال آخر، فإنه بواسطة القاعدة (1) تكون K صيغة وبالتالي وبواسطة القاعدة (2) تكون $\rceil K$ صيغة ومرة أخرى بواسـطة (2) تكون $\rceil\rceil K$ صيغة (نستطيع الاستمرار بإضافة رمز النفي بالعدد الذي نرغبه) وفعلاً فإن $\rceil\rceil\rceil\rceil\rceil\rceil K$ تكون صيغة.

نلاحظ أن القاعدة (2) تشترط في كل مرة نـدخل فيهـا أحـد الـروابط الثنائيـة (أي أحد الروابط: Λ، V، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$) ندخل أيضاً بالمقابل زوجـاً مـن الأقـواس، وهكـذا تكـون مثلاً $(K \Lambda \rceil L)$ صيغة بينما $K \Lambda \rceil L$ ليست صيغة، لكـن زوج مـن الأقـواس يحـصر كـل شيء آخر في الصيغة لا يكـون في الحقيقـة ضروريـاً لجعـل معنـى الـصيغة أكـثر وضـوحاً. وهكذا فسنتبنى طريقة نحذف بواسطتها الأقواس الخارجية أحيانـاً في حالـة عـدم وقـوع التباس. إن حذف الأقواس الخارجية هو الانحراف الوحيـد عـن قواعـد بنـاء الـصيغ الـذي نسمح به. وهكذا فسنكتب $(K \leftrightarrow L) \rightarrow M$ عوضاً عن $((K \leftrightarrow L) \rightarrow M)$.

نـشير إلى أن الحـروف اليونانيـة $\alpha, \beta, \gamma, \delta,...$ وهـذه الحـروف ودلائلهـا $\alpha_1, \alpha_2,...,\beta_1, \beta_2...$ ليست من اللغة الشيئية (لغة حساب القضايا) وإنما من ما وراء لغـة[1] حساب القضايا، وهي اللغة التي تشرح لغة حساب القضايا.

إن القواعد الثلاث أعلاه تمكننا مـن التمييـز بـين تتـابع الرمـوز الـذي يكـون صـيغاً والتتابع الذي لا يمثل صيغة.

مثال:

كل تتابع من الرموز مما يأتي لا يمثل صيغة ΛL $\rceil K \rightarrow$ ، $K V (L \leftrightarrow K$.

الكثـير مـن المناطقـة يـستخدمون مـصطلح (الـصيغة الجيـدة التكـوين) مقابـل (الصيغة) الذي استخدمناه نحن من أجل الاختصار.

1-metalanguage.

2.1 دلالة لغة حساب القضايا التقليدي:

إن المفهوم المركزي في دلالة لغة حساب القضايا التقليدي هو مفهوم (قيمة الصدق)، فالقضايا تمتلك قيمة صدق T (صادقة) وقيمة صدق F (كاذبة). وأساس هذه الدلالة هو مبدأ الثنائية، أي أن (صادقة) و (كاذبة) هما القيمتان الوحيدتان وأن كل قضية تمتلك إحدى هاتين القيمتين. تستخدم جداول الصدق لتقويم (تحديد قيم الصدق) الصيغ، حيث تبين الجداول كيفية بلوغ الصيغ قيم صدقها.

نعتمد في بناء جداول صدق الصيغ الأكثر تركيباً على الجداول الأساسية لصدق الروابط التي مرت بنا، ويتم هذا البناء كالتالي:

1- ترتب المتغيرات القضائية التي تتركب منها الصيغة حسب الترتيب الأبجدي في الأعمدة الأولى من الجدول اعتباراً من اليسار إلى اليمين.

2- نضع تحت كل متغير قيم الصدق التي يتقبلها في كل التعيينات المختلفة. وعدد هذه التعيينات، المساوي لعدد الأسطر الأفقية، هو 2^n (حيث n عدد المتغيرات القضائية).

3- نقوم بتوزيع قيم الصدق فنضع تحت المتغير الأول $2^n/2$ (T) و $2^n/2$ (F) ونكرر بالتناوب $2^n/4$ (T) و $2^n/4$ (F) تحت المتغير الثاني و $2^n/8$ (T) و $2^n/8$ (F) تحت المتغير الثالث... وهكذا إلى أن نصل إلى المتغير الأخير، حيث نوزع بالتناوب مرة T ومرة F حتى تمتلئ جميع الأسطر الأفقية للجدول.

4- نقوم بتقويم الصيغ الفرعية التي تتركب منها الصيغة الكلية وفقاً للجداول الأساسية للروابط، ثم نقوم بتقويم الصيغ التي هي أكثر تركيباً إلى أن نصل إلى تقويم الصيغة المطلوبة.

مثال:

تقويم الصيغة:

$$(K \rightarrow L) \leftrightarrow (\neg K \vee \neg L)$$

K	L	$\neg L$	$K \rightarrow L$	$\neg K$	$\neg K \vee \neg L$	$(K \rightarrow L) \leftrightarrow (\neg K \vee \neg L)$
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

إن جدول صدق أي صيغة يشير إلى قيمة صدق (T أو F) للصيغة من أجل كل تعيين لقيم صدق المتغيرات القضائية التي تتركب منها الصيغة (التعيينات في المثال أعلاه: TT، TF، FT، FF). وبالتالي فإن كل صيغة تسبب دالة صدق والتي عدد متغيراتها هو عدد المتغيرات القضائية المختلفة نفسها التي تتركب منها الصيغ. وهكذا فإن جدول الصدق هو تمثيل تخطيطي لدالة صدق.

3.1 اعتماد القضايا على سياقاتها:

تعتبر القضايا في المنطق التقليدي (الثنائي القيم) أنها لا تعتمد (مستقلة) عن الزمان والمكان. وهكذا، فقد اعتبرت أنها صادقة أو كاذبة من دون قيد أو شرط. فالقضايا مثل:

الماء السائل ملائم لظهور الحياة (1)

كذلك فإن القضية الرياضية:

$18 = 12 + 6$ (2)

هي قضايا لا يعتمد صدقها أو كذبها على الحالة (الظرف: الزمان والمكان) التي يتم تقويمها (تحديد قيم صدقها) بها، ولكن معظم القضايا ليست كذلك. فمثلا القضية:

يلقي الأستاذ محاضرته (3)

لا تمتلك خاصية القضيتين (1) و (2) أعلاه، أي أنها تعتمد على الحالة (الزمان والمكان) التي يتم بها تقويمها ونسميها قضية ظرفية أو (حالاتية)[2]. وإن أي محاولة لتكييفها بحيث لا يصبح صدقها أو كذبها متغيراً من حالة إلى أخرى، تكون محاولة غير مجدية. فمثلاً، يمكننا توسيع (3) كالتالي:

في مارس وفي الساعة 10 يلقي الأستاذ محاضرته (4)

ولكن (4) تبقى ظرفية، لأنه قد تم ذكر الزمن الذي ألقيت به المحاضرة، ولكن لم يذكر المكان الذي ألقيت فيه. وحتى لو تم ذكر هذا المكان وليكن

2- situational.

مثلاً، (في جامعة بغداد) فإننا نتساءل: في أي قاعة أو أي غرفة أو مدرّج ألقيت المحاضرة؟ وبين أي لحظتين من الزمن على وجه الدقة ألقيت؟.

من الواضح أننا نستطيع الاستمرار في توسيع القضية (3) أكثر فأكثر. وعوضاً عن فعل ذلك فإنه يبدو من الطبيعي أكثر تفسيرها على خلفية السياق الذي استخدمت فيه القضية. هذا السياق الذي يقدم الـ (هنا) و (الحين)[3]، اللذين يعتمد عليهما صدق القضية الظرفية. وهكذا، فمثلاً القضية:

السماء تمطر (5)

تكون صادقة في سياق ظرفي معين (لحظة زمنية، مكان معين) إذا حدث أنها تمطر في ذلك السياق. أما القضية في الماضي مثل:

السماء أمطرت (6)

فإنها تعود إلى لحظة زمنية قبل الآن (الحين). وهكذا، فإن (6) أكثر تعقيداً حيث إنها تحتاج إلى سياقين (لحظتين زمنيتين واحدة في الماضي وأخرى اللحظة الآنية) وليس إلى سياق واحد (لحظة زمنية واحدة). وهكذا نتوصل إلى أنه: عند تفسير قضية في أي سياق معين فمن الضروري غالباً أخذ سياقات أخرى بالحسبان.

4.1 العوالم الممكنة Possible worlds:

بإضافة الرمز N إلى رموز لغة حساب القضايا التقليدي ووضعه قبل الصيغة α، فإننا نحصل على صيغة جديدة $N\alpha$.

يسمى N مؤثراً[4]، وهكذا نستطيع بناء الصيغ مثل:

$$N\,(NP \rightarrow Nq),\ Np \leftrightarrow Q,\quad N\,NP \rightarrow NP,\ P \wedge NP$$

إن تفسيرات المؤثر N تكون، مثل: أنا أعرف أن، دائماً سيكون الحال أن، مرة كان الحال أن، من الضروري أن، من الممكن أن،....

باستخدام التفسير الأول يكون نص الصيغ الثلاث الأولى، حيث P متغير قضائي كالتالي:

الصيغة الأولى: P و أنا أعرف أن P.

3- (here), (now).

4- operator.

الصيغة الثانية: إذاً أنا أعرف أنني أعرف أن P فإنني أعرف أن P.

الصيغة الثالثة: أنا أعرف أن P إذا وفقط إذا كانت Q.

إن السياقات التي يجب أخذها بالحسبان تعتمد على التفسير المعطى للمؤثر N، فإذا كان اهتمامنا منصباً على التعابير الزمنية مثل: دائما ستكون الحالة أن، ومرة كانت الحالة أن، فإن السياقات تكون لحظات من الزمن، أما إذا كان اهتمامنا منصباً على التعابير الجهوية[5]، مثل: من الضروري أن، من الممكن أن، فإنه يمكن مطابقة السياقات التي يجب أن تؤخذ بالحسبان مع جميع الحالات الممكنة. موضوعنا هنا يكمن في أن مجموعة السياقات K التي سنختارها للعمل بها تعتمد كثيراً على التفسير (المعنى) المعطى للمؤثر N.

مما ذكر أعلاه، يتبين أننا سنعوض دلالة حساب القضايا التقليدي والتي تأخذ الصيغ فيها قيمتي صدق مطلقة (1 أو 0) بنظام تعيِّن فيه دوال الصدق قيم صدق نسبة إلى سياق ما k (مأخوذاً من مجموعة السياقات K). وهكذا فإن ما تعلمناه بالنسبة إلى قيمتي صدق الروابط في حساب القضايا التقليدي سيبقى من دون تغيير، فمثلاً الصيغة $\neg\alpha$ ستأخذ القيمة 1 في سياق معين، إذا أخذت α القيمة 0 في السياق نفسه.

إن مجموعة جميع السياقات K تستخدم فقط عندما نبدأ بتقويم صيغة على الشكل $N\alpha$ في سياق معين k، وذلك لأن صدق أي صيغة $N\alpha$ في سياق k يعتمد على صدق α ليس فقط في السياق k نفسه، وإنما كذلك في سياقات أخرى 'k من K. فمثلاً إن صدق التعبير (مرة كانت الحالة P) يعتمد على وجود سياق ما (لحظة زمنية) 'k أبكر (أسبق) من السياق الحاضر (لحظة زمنية) k والذي كانت فيه P صادقة.

وبصورة عامة: إن تحديد أي من السياقات نأخذها بالحسبان عند تقويم صدق صيغة $N\alpha$ في سياق ما k يعتمد على التفسير المعطى إلى N، ويعتمد كذلك على مميزات خاصة للسياق k الذي يحدث فيه التقويم، ذلك أن مجموعة اللحظات الزمنية السابقة إلى k تكون مختلفة بالنسبة إلى اللحظات المختلفة لـ k.

إن مجموعة السياقات 'k ذات الصلة بالتقويم في k تسمى السياقات القابلة للموصولية[6] أو الموصولة من k، وهكذا فإن قيمة صدق $N\alpha$ في k تعتمد على قيم

5- modal.

6- accessible.

صدق α في السياقات 'k الموصولة من k، فمثلاً إذا كان N يعني (من الضروري أن) فإن α يجب أن تكون صادقة في جميع السياقات الموصولة من k، إذاً أريد أن تكون $N\alpha$ صادقة في k. أما إذا كان N يعني (من الممكن أن) فإنه يكفي أن تكون α صادقة في أي من السياقات الموصولة من k حتى تكون $N\alpha$ صادقة في k.

نستطيع الآن إعطاء التعريف أدناه:

تعريف 1: النموذج[7] S يتألف من:

(1) مجموعة K غير خالية من السياقات.

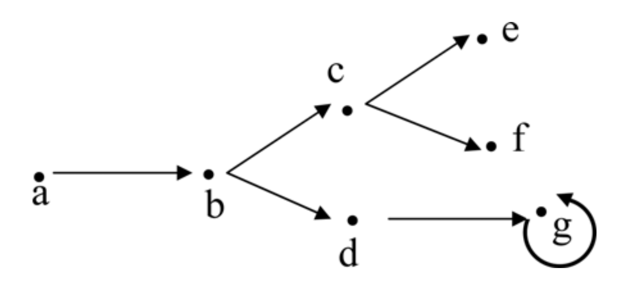
(2) علاقة ثنائية R معرفة على K ($R \subseteq K \times K$) هي علاقة الموصولية.

(3) دالة تقويم V تعين قيمة صدق V(P,k) لكل متغير قضائي P في كل سياق k، حيث $k \in K$.

انطلاقاً من هذا التعريف يمكننا وضع تعريف يعطي قيمة الصدق $V(\alpha,k)$ للصيغة α في السياق k للنموذج S. حسب هذا التعريف، فإن الروابط المعروفة لدينا سابقاً ($\neg$، $\wedge$، $\vee$، $\leftarrow$، $\leftrightarrow$) تحتفظ في هذا التعريف بما درسناه عنها، بينما ما يخص المؤثر N فيعتمد على التفسير المعطى له.

من المناسب أحياناً إعطاء مخطط السياقات وعلاقة الموصولية. ويتم تمثيل السياقات باستعمال النقاط، أما الأسهم فتستخدم للإشارة إلى أي السياقات موصولة من أي السياقات الأخرى، والمثال التالي يبين مثل هذا المخطط.

- السياق b موصول فقط من السياق a.
- السياقان c,d موصولان من b.
- السياقان e,f موصولان من c.
- لا يوجد أي سياق موصول من e.
- لا يوجد أي سياق موصول من f.
- السياق g موصول من نفسه.



7- مثل هذا النموذج يسمى نموذج كريبكة Kripke model.

إن المفاهيم الجهوية[8] المدروسة في منطق قضايا الجهة مأخوذة من الفلسفة أكثر منها من اللغة الاعتيادية. فالتعابير الجهوية في اللغة الاعتيادية هي مثلاً: يجب، يستطيع. أما الفلسفة فلها موجهاتها التقليدية: من الضروري أن، من الممكن أن. والحقيقة أن منطق الجهة ينشغل بالأشكال[9] التي يمكن أن تكون فيها الأشياء صادقة أو كاذبة، وعلى وجه الخصوص إمكانيتها وضرورتها. ولهذا نقول: إن منطق الجهة هو منطق الضرورة والإمكانية. سنرمز بواسطة L للموجه: من الضروري أن، وبواسطة M للموجه: من الممكن أن. إذا كان لدينا L في لغتنا المنطقية فلا نحتاج إلى M كرمز أولي، ذلك أن القول: من الممكن P يكافئ القول: ليس من الضروري أن ليس P ولهذا يمكننا إعطاء التعريف (اختصاراً نكتب تع) التالي:

$$\forall \alpha : M\alpha \equiv_{\text{تع}} \neg L \neg \alpha$$

وهكذا فلكل تفسير إلى L يوجد تفسير يقابله إلى M. فمثلاً، إذا كان LP يعني: من اللازم أخلاقياً أن P، فإن MP سيعني: من المسموح أخلاقياً أن P (أو ليس من اللازم أنه ليسP). وإذا كان LP يعني: سيكون دائماً الحال أن P، فإن MP يعني: سيكون أحياناً الحال أن P (أو لن يكون دائماً الحال ليس P)، وهكذا. وإذا أخذنا M كرمز أولي فيمكننا تعريف L كالتالي: $\neg M \neg$. وبالتالي فإن اختيار L أو M كرمز أولي هو مسألة تفضيل شخصي. أما نحن فسنعتبر L أولياً و M معرفاً. الاستحالة هي أيضاً من المفاهيم الجهوية، بالإضافة إلى الضرورة والإمكانية ولن نستخدمها هنا، لأنه من السهل التعبير عنها على أنها $\neg M$ أو $\neg L$. القضايا التي هي ليست ضرورية وليست ممكنة (مستحيلة) تسمى عارضة.

لقد ناقشنا في هذه الفقرة، الأفكار الأساسية التي تكمن خلف دلالة العوالم الممكنة والسياقات التي أشرنا إليها سابقاً، سنسميها منذ الآن: العوالم الممكنة. أما ماذا نقصد بالعوالم الممكنة، فإنها مسألة تكتسي بعض الأهمية

8- modal concepts.

9- modes.

وقضية مثيرة للجـدل في الميتافيزيقـا وفي تطبيقـات منطـق الجهـة عـلى نظريـات المعنـى بالنسبة إلى اللغة الطبيعية (العاديـة). ولكنـه، مـن حـسن الحـظ، فإنـه مـن وجهـة نظـر المنطق فـلا تكتـسي هـذه المـسألة أي أهميـة. فجميعنـا يمكـن أن يتـصور الأشـياء بـشكل مختلف. فمثلاً، تستطيع أن تتـصور أن كـل الأشـياء عـلى حالهـا تماماً ماعـدا أنـك أطـول بسنتمتر واحد. إن ما تصورته هنا، هو حالة مختلفة، أو عالم ممكن. طبعاً، العالم الـواقعي هو أيضاً عالم ممكن، ويوجد عدد غير محدد آخر من هذه العـوالم: عنـدما يكـون طولـك أكبر بسنتمترين، بثلاثة سنتمترات، عندما يكون شعرك بلـون آخـر، عنـدما يكـون مـيلادك ببلد آخر، ...إلخ.

يمكننا توضيح مفهوم العوالم الممكنة ببساطة، كالتالي: نحن نعـيش في أحـد العـوالم الممكنة وهو العالم الواقعي. يمكن اعتبار الروايات الخيالية كوصف للعالم الممكن المختلف عن عالمنا الواقعي. وبعض الروايات الخيالية تشبه كثيراً عالمنا الواقعي ولكن بعضها الآخر بعيدة عن عالمنا الواقعي. وهكذا، فإذا قال أحدهم: (من الممكن أن تعيش فيلـة مجنحـة في الهند). فإن هذا القول يكون صادقاً فقط في حالة وجود عالم ممكـن تعـيش فيـه فيلـة مجنحة في الهند. إن القضايا في العوالم الممكنة تكون صادقة في عالم، وليست صـادقة دون تحديد العالم كما هو الحال في منطق حساب القضايا التقليدي.

5.1 تركيب ودلالة قضايا الجهة:

يقـوم تركيـب قـضايا الجهـة عـلى إضـافة المـؤثرين L وM إلى رمـوز لغـة حـساب القضايا التقليدي وفق القاعدة التالية:

إذا كان α أي صيغة من حـساب القـضايا التقليـدي، فـإن L α و M α صـيغتان أيضاً.

وهكذا، فإن $ML\alpha \rightarrow \alpha$, $L\alpha \rightarrow LL\alpha$ صيغتان. تقرأ الأولى: إذا كانـت مـن الضروري α فإنه من الضروري أن تكـون مـن الـضروري α. وتقـرأ الثانيـة: إذا كـان مـن الممكن أن تكون من الضروري α فإن α.

إن فكرة العوالم الممكنة تمكننا من دراسة دلالة المفاهيم الجهوية: الضرورة والإمكانية، وهكذا فإن صدق $L\alpha$ و$M\alpha$ في أي عالم معين يعتمد على صدق α في عوالم ممكنة أخرى. وليس من الضروري أخذ جميع العوالم الممكنة في الحسبان. وصورياً يمكن التعبير عن هذا بواسطة علاقة موصولية والتي تبين أي العوالم تؤخذ في الحسبان.

نستطيع الآن إعطاء التعريف التالي:

تعريف 2: النموذج S لمنطق قضايا الجهة يتألف من:

(1) مجموعة غير خالية W من العوالم الممكنة.

(2) علاقة ثنائية R، حيث $R \subseteq W \times W$ هي علاقة الموصولية معرفة على عناصر W، أي أن R تحدد فيما إذا كان w R w أم لا من أجل أي w، w (ليس بالضرورة مختلفين) من W.

(3) دالة تقويم V تعين قيمة صدق V(P,w) لكل متغير قضائي P في كل عالم w، حيث $w \in W$.

تسمى مجموعة العوالم الممكنة W مع العلاقة الثنائية R بالإطار[10] F أي أن F هو (W,R) وهكذا، فإن النموذج S يتألف من الإطار F بالإضافة إلى دالة الصدق V، أي أن النموذج S هو الثلاثية (W, R, V) حيث (W,R) هو الإطار وV هو دالة الصدق. سنكتب $V(P,w) = 1$ إذا عين V القيمة 1 إلى P في w وسنكتب $V(P,w) = 0$ إذا عين V القيمة 0 إلى P في w.

من المفيد ذكر التوضيحات التالية:

1. يمكن الحصول على نماذج مختلفة بالإطار F نفسه، وذلك بتغيير دالة الصدق (التقويم) V.

2. تثبت في الإطار فقط العوالم الممكنة التي يتم التعامل معها، وأي من تلك العوالم تكون موصولة مع أي من العوالم الأخرى.

10- frame.

إن ما يفعله تعريف الصدق هو تحديد أي من قيمتي الصدق يجب أن تنسب إلى الصيغة المركبة (ليست ذرية) في كل من العوالم الممكنة. وبعبارة أخرى فإن هذا التعريف يحدد في نموذج معين، كيفية توسيع دالة الصدق المتوافرة للمتغيرات القضائية، لتكون دالة الصدق، التي تطبق على جميع الصيغ في اللغة المدروسة.

سنعطي الآن تعريف الصدق بالنسبة إلى منطق قضايا الجهة كالتالي:

تعريف 3: إذا كان S هو النموذج (W, R, V) حيث (W, R) هو الإطار و V هو دالة الصدق فإنه:

(1) لكل متغير قضائي P ولكل $w \in W$، إما $V(P,w) = 1$ أو $V(P,w) = 0$.

(2) قاعدة النفي $[V\rceil]$: لكل صيغة α ولكل $w \in W$ ، $V(\rceil\alpha, w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 0$ و إلا $V(\rceil\alpha, w) = 0$.

(3) قاعدة الفصل $[V\vee]$ لكل صيغتين α و β ولكل $w \in W$، $V(\alpha \vee \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 1$ أو $V(\beta,w) = 1$ و إلا $V(\alpha \vee \beta,w) = 0$.

(4) قاعدة الضرورة $[VL]$: لكل صيغة α ولكل $w \in W$، $V(L\alpha,w) = 1$ إذا كان لكل $w \in W$ حيث إن $w R w$، $V(\alpha, w') = 1$ وإلا $V(L\alpha,w) = 0$.

سنعطي أيضا القواعد التالية لسهولة الرجوع إليها على الرغم من أنها غير ضرورية، لأن جميع الصيغ أدناه يمكن كتابتها بواسطة الرموز الأولية: $\rceil$ ، $\vee$، L.

(5) قاعدة الوصل $[V\wedge]$: لكل صيغتين α و β، ولكل $w \in W$، $V(\alpha\wedge \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 1$ و $V(\beta,w) = 1$ وإلا $V(\alpha\wedge \beta,w) = 0$.

(6) قاعدة الاستلزام $[V \rightarrow]$: لكل صيغتين α و β ولكل $w \in W$، $V(\alpha\rightarrow \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = 0$ أو $V(\beta,w) = 1$ وإلا $V(\alpha\rightarrow \beta,w) = 0$.

(7) قاعدة الاستلزام الثنائي [$V\leftrightarrow$]: لكـل صـيغتين α وβ ولكـل $w \in W$، $V(\alpha\leftrightarrow \beta,w) = 1$ إذا كان $V(\alpha,w) = V(\beta,w)$، وإلا $V(\alpha\leftrightarrow \beta,w) = 0$.

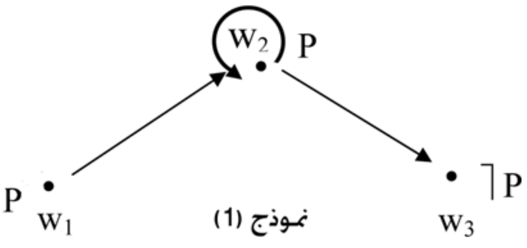
(8) قاعدة الإمكانية [VM]: لكل صـيغة α ولكـل $w\in W$، $V(M\alpha,w) = 1$ إذا وجد $w' \in W$ حيث إن $w R w'$، $V(\alpha,w') = 1$ وإلا $V(M\alpha,w) = 0$.

من الواضح أن الـروابط الخمـسة في المنطـق التقليـدي ($\neg$ ، $\vee$ ، $\wedge$ ، $\rightarrow$ ، $\leftrightarrow$) تمتلك المعنى نفسه كما هو الحال هنا. أما بالنسبة إلى M و L فيـستخدم مفهـوم العـوالم الممكنة. نلاحظ هنا حسب (4) أنه (من الضروري) يعني الصدق في كل العوالم الموصـولة، بينما وحسب (8) فإن (من الممكن) يعني الصدق في عـالم واحـد عـلى الأقـل مـن العـوالم الموصولة.

سنأخذ أمثلة تطبيقية على (4) و (8) من التعريف 3 أعلاه.

مثال **1**:

لنأخذ النموذج التالي:



نموذج (1)

يمكننا قراءة هذا النموذج كالتالي: توجد 3 عوالم ممكنة فقط:

w_1, w_3, w_2، أي أن $W=\{w_1, w_2, w_3\}$. الأسهم تبين علاقـة الموصـولية بـين العـوالم كالتالي:

w_2 موصول من w_1 ، w_2 موصول من نفسه، w_3 موصول من w_2. ولا يوجد أي عـالم موصول من w_3، وهكذا فبكتابة العلاقة R كمجموعة من الأزواج المرتبة فإننا نحصل على:

$$R = \{(w_1, w_2), (w_2, w_2), (w_2, w_3)\} \subseteq W \times W$$

أو أن

$$w_1 R w_2, w_2 R w_2 , w_2 R w_3$$

إننا نتعامل هنا مع لغة ذات متغير قضائي واحد P، كما أن النموذج المعطى يبين دالة الصدق كالتالي:

$$V(P, w_1) = V(P, w_2) = 1, V(P, w_3) = 0$$

سنحاول الآن إيجاد قيم صدق الصيغتين المركبتين MP و LP في العوالم المختلفة w_1, w_2, w_3.

1. قيم صدق **MP** و **LP** في w_1:

(أ) بما أن $w_1 R w_2$ و $V(P, w_2) = 1$، فإذاً $V(MP, w_1) = 1$، أي أن MP صادقة في w_1، (حسب القاعدة [VM]).

(ب) بما أن w_2 هو العالم الوحيد الموصول من w_1، فإذاً $V(LP, w_1) = 1$ (حسب القاعدة [VL]).

أي أن LP صادقة في w_1.

2. قيم صدق **MP** و **LP** في w_2:

(أ) بما أن P صادقة في w_2 و $w_2 R w_2$، فإذاً $V(MP, w_2) = 1$ (حسب القاعدة [VM]) أي أن MP صادقة في w_2.

(ب) بما أن $w_2 R w_3$ و P كاذبة في w_3، فإذاً $V(LP, w_2) = 0$ (حسب القاعدة [VL]) أو أن LP كاذبة في w_2.

قبل أن نتحقق من صدق MP وLP في w_3، حيث لا يوجد أي عالم موصول من w_3، لابد من التوضيح أدناه، حيث يسمى w_3 بالنهاية الميتة[11] لعدم وجود أي عالم موصول منه.

إن القاعدة [VL] تنص على أن $L\alpha$ تكون صادقة في عالم w إذا كانت الصيغة α نفسها صادقة في كل العوالم الموصولة من w. إننا نفسر هذا ليعني أنه: إذا لم يوجد أي عالم يكون موصولاً من w، فإن $L\alpha$ تكون صادقة في العالم w مهما كانت α (حتى لو كانت α هي الصيغة الكاذبة دائماً $P \wedge \neg P$). من السهولة ملاحظة لماذا نعتبر $L\alpha$ صادقة في النهايات الميتة، وذلك بواسطة رؤية لماذا يكون نفيها $\neg L\alpha$ كاذباً في تلك النهايات: بما أن $\neg L\alpha$

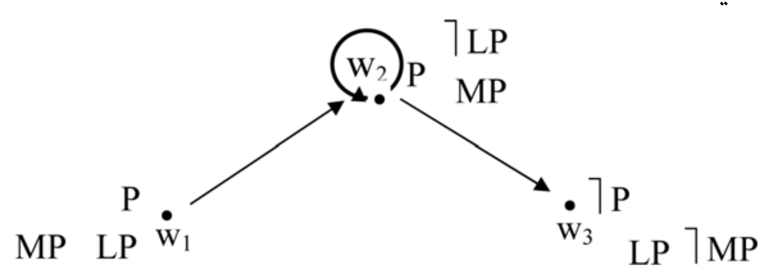
11- dead end.

تكافئ $M \urcorner \alpha$ وبما أنه حسب [VM] فإن أي صيغة على الشكل $M\beta$ تكـون صـادقة في عالم w فقط إذا وجد عالم موصول من w. وهكذا، ولعدم وجود مثل هذا العالم فإن $M\beta$ أو $M \urcorner \alpha$ تكون كاذبة وبالتـالي $\urcorner L\alpha$ تكـون كاذبـة أيـضاً. وإذاً، $L\alpha$ تكـون صـادقة في النهايات الميتة. والآن نعود إلى صدق MP وLP في w_3، حيث إن w_3 هو نهاية ميتة، لعدم وجود أي عالم موصول منه.

3. قيم صدق MP و LP في w_3:

بما أنه لا توجد عوالم ممكنة موصولة من w_3، فإنه حسب التوضيح أعلاه تكون LP صادقة في w_3، وذلك لأن w_3 نهاية ميتة. وحسب التوضيح نفسه تكون MP كاذبـة في w_3، وذلك لأن w_3 نهاية ميتة.

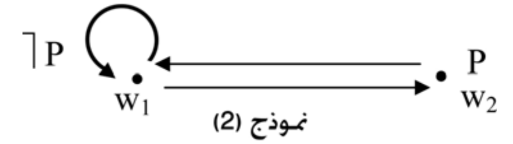
نستطيع الآن إضافة الصيغ المركبة، التي حـددنا قـيم صـدقها إلى المخطـط في هـذا المثال كالتالي:



لقد برهنـا أن LP صـادقة وMP صـادقة في w_1، فأضـفنا هـاتين الـصيغتين إلى w_1؛ وبرهنا أن MP صادقة في w_2 فأضفنا MP، ولكن LP كاذبة فأضفنا $\urcorner LP$ إليه؛ أمـا في w_3، فلقد برهنا أن LP صادقة بينما MP كاذبة، فأضفنا LP و $\urcorner MP$ إليه.

مثال 2:

لنأخذ النموذج التالي:



نموذج (2)

سنحاول إيجاد قيم صدق الصيغة LMP في النموذج.

نلاحظ من تخطيط النموذج أن $W = \{w_1, w_2\}$

و $R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_1)\}$

$V (P, w_1) = 0 , V (P, w_2) = 1$

1. قيمة صدق LMP في w_1:

حتى تكون LMP صادقة في w_1، فيجب أن تكون:

$$\forall w', w_1 R w', V(MP, w') = 1$$

نحن نعلم أن $w_1 R w_1$ و $w_1 R w_2$، فإذاً يجب أن تكون MP صادقة في w_1 و w_2، وبما أن P صادقة في w_2 و $w_1 R w_2$، فإذاً MP صادقة في w_1. لكن MP كاذبة في w_2، لأن P كاذبة في w_1 و $w_2 R w_1$. إذاً LMP كاذبة في w_1.

2. قيمة صدق LMP في w_2:

حتى تكون LMP صادقة في w_2 يجب أن تكون MP صادقة في جميع العوالم الموصولة من w_2. يوجد عالم واحد موصول من w_2 هو w_1، إذاً يجب أن تكون MP صادقة في w_1. وبما أن P صادقة في w_2 و $w_1 R w_2$ فإذاً MP صادقة في w_1. وهكذا فإن LMP صادقة في w_2.

نستطيع الآن إضافة الصيغتين المركبتين، اللتين حددنا قيم صدقهما إلى المخطط في هذا المثال كالتالي:



لقد برهنا أن LMP كاذبة في w_1، فأضفنا ⌉ LMP إليه. وبرهنا أن LMP صادقة في w_2، فأضفنا LMP إليه.

مثال 3:

لنجد قيم صدق ML⌉P في النموذج 2.

سنحاول تحديد في ما إذا كانت الصيغة ML⌉P صادقة أم كاذبة في كل من w_1 و w_2.

(1) قيمة صدق $ML\rceil P$ في w_1:

تكون هذه الصيغة صادقة في w_1 إذا وجدت بعض العوالم الممكنة (عالم واحد على الأقل) w' بحيث إن $w_1 R w'$ و $L\rceil P$ صادقة في w'. يوجد w_1 و w_2 حيث $w_1 R w_2$ و $w_1 R w_1$. الآن حتى تكون $L\rceil P$ صادقة في w_1 فيجب أن تكون $\rceil P$ صادقة في كل العوالم الموصولة من w_1. نرى أن w_1 موصول من w_1 و w_2 موصول من w_1. $\rceil P$ صادقة في w_1 ولكنها كاذبة في w_2. وإذاً $L\rceil P$ كاذبة في w_1 وبالتالي فإن $ML\rceil P$ كاذبة في w_1. ولكن الصيغة $L\rceil P$ صادقة في w_2، لأن $w_2 R w_1$ فقط و$\rceil P$ صادقة في w_1. وهكذا، تكون $ML\rceil P$ صادقة في w_1.

(2) قيمة صدق $ML\rceil P$ في w_2:

هذه الصيغة كاذبة في w_2، لأن w_1 موصول فقط من w_2. وهكذا، فيجب أن تكون $L\rceil P$ صادقة في w_1. وهذا غير ممكن لأن $w_1 R w_2$ وP صادقة في w_2. إذاً $ML\rceil P$ كاذبة في w_2.

نستطيع الآن إضافة الصيغة المركبة، التي حددنا قيم صدقها إلى المخطط في هذا المثال كالتالي:

$\rceil P$ — $ML\rceil P$ — w_1

$\rceil ML\rceil P$ — P — w_2

لقد برهنا أن $ML\rceil P$ صادقة في w_1، فأضفنا MLP إليه؛ وبرهنا أن $ML\rceil P$ كاذبة في w_2، فأضفنا $\rceil ML\rceil P$ إليه.

تعريف 4: الصيغ التي تكون صادقة في كل العوالم الممكنة لنموذج S نسميها صحيحة[12] في ذلك النموذج.

نعبر عن ذلك رمزياً $V(S(\alpha)) = 1$، حيث α أي صيغة.

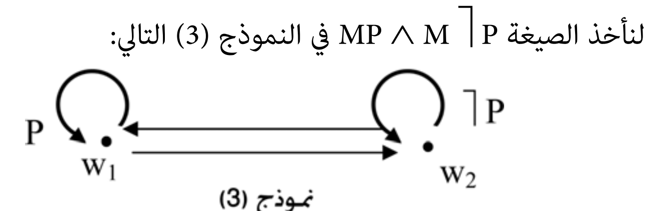
تقسم الصيغ الصحيحة في S إلى نوعين:

1. الصيغ التي تعتمد صحتها على نوعية معينة لدالة الصدق V.
2. الصيغ التي لا تعتمد صحتها على نوعية V.

12- valid.

مثال 4:

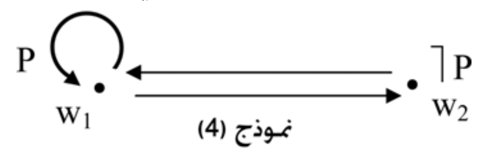
لنأخذ الصيغة $\neg P \wedge MP \wedge M$ في النموذج (3) التالي:



نموذج (3)

هذه الصيغة هي من النوع الأول، فإذا غيرنا قيمة صـدق P في w_2 إلى 1 أي أن V $(P, w_2) = 1$، تصبح هذه الصيغة غير صحيحة (خاطئـة). لكـن الـصيغة $LP \longrightarrow P$ تبقـى صحيحة حتى في هذه الحالة. وبما أنها صـادقة في كـل العـوالم الممكنـة بغـض النظـر عـن نوعية V فإنها تكون من النوع الثاني.

إن صـحة الـصيغة $LP \longrightarrow P$ يمكـن أن تتغـير فقـط عنـدما نبـدّل الـشيء الأسـاسي للنموذج الذي هو إطاره بإطار آخر، ولنأخذ المثال التالي:



نموذج (4)

نلاحظ هنا تغير علاقة الموصولية R حيث إن w_2 لم يعد موصولاً مـن نفـسه، بيـنما بقي V على حاله. نـرى أن LP صـادقة في w_2، ولكـن P كاذبـة فيـه. إذاً $LP \longrightarrow P$ تكـون كاذبة في w_2، أي أن

$$V\ (LP \longrightarrow P\ ,\ w_2) = 0$$

هذا النموذج يسمى مثال - مضاد[13] لصحة $LP \longrightarrow P$.

بشكل عام: إذا كانت الصيغة α صحيحة في كل نموذج مبني عـلى أسـاس إطـار F فإننا نقول إن α صحيحة في F.

الصيغ مثل α هذه والتي تعكس خاصية إلى الإطار F غالباً مـا تـصبح خاصـية إلى صنف كامل من الإطارات.

قبل أن نقـوم بإعطـاء عـدة مبرهنـات، مـن المفيـد التـذكير أدنـاه، بـبعض خـواص العلاقات الثنائية، حيث علاقة الموصولية واحدة منها.

13- counter example.

1. خاصية الانعكاس **Reflexitivity**

علاقة الموصولية R تكون انعكاسية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\ w \in W, wRw$$

2. الخاصية غير الانعكاسية **Ireflexitivity**

علاقة الموصولية R تكون غير انعكاسية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\exists\ w \in W, w\not R w$$

3. الخاصية التماثل (التناظر) **Symmetry**

علاقة الموصولية R تكون متماثلة على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\ w, w' \in W\ ,\ (\ wRw' \rightarrow w'Rw)$$

4. الخاصية غير التماثلية (غير التناظرية) **Asymatrical property**

علاقة الموصولية R تكون غير تماثلية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\exists\ w, w' \in W\ ,\ (\ wRw' \not\rightarrow w'\ Rw)$$

5. خاصية التعدي **Transitivity**

علاقة الموصولية R تكون متعدية على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\ w, w', w'' \in W, (\ wRw' \wedge w'\ Rw'') \rightarrow w\ Rw''$$

6. خاصية التكافؤ **Equivalence relation**

علاقة الموصولية R تكون علاقة تكافؤ على W إذا وفقط إذا كانت R انعكاسية ومتماثلة ومتعدية على W.

7. خاصية التسلسل (التمدد) **Serial (extendability)**

علاقة الموصولية R تكون متسلسلة على W إذا وفقط إذا كان:

$\forall\ w \in W, \exists\ w'$ بحيث إن wRw'

8. خاصية الترابط **Connected relation**

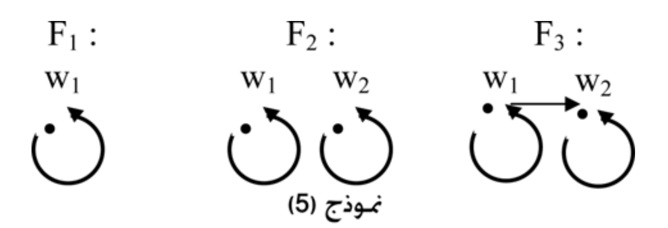
علاقة الموصولية R تكون مترابطة على W إذا وفقط إذا كان:

$$\forall\ w, w', w'' \in W,$$

$$(\ wRw' \wedge w\ Rw'') \rightarrow (w'\ Rw'' \vee w''R\ w')$$

مثال **5**:

لنقارن إطار النموذج (3) مع الإطارات التالية:



نموذج (5)

نلاحظ أن الصيغة $LP \rightarrow P$ صحيحة في جميع الإطارات أعلاه، هذا بالإضافة إلى إطارات أخرى. هذه الإطارات تمتلك خاصية مشتركة مسؤولة عن صحة الصيغة $LP \rightarrow P$. وهذه الخاصية المشتركة هي الخاصية الانعكاسية لعلاقة الموصولية للإطارات. وبالفعل فإن هذه الخاصية تجد تعبيرها بواسطة الصيغة $LP \rightarrow P$، لأنه يمكننا تبيان أن هذه الصيغة تعرِّف صنف الإطارات الانعكاسية وهذا يعني أن:

الصيغة $LP \rightarrow P$ صحيحة في كل إطار يمتلك الخاصية الانعكاسية وبالعكس، أي أنه: إذا كانت $LP \rightarrow P$ صحيحة في إطار فإن هذا الإطار يجب أن يمتلك علاقة موصولية انعكاسية.

مبرهنة 1:

الصيغة $L\alpha \rightarrow \alpha$ صحيحة في الإطارات التي تمتلك علاقة موصولية انعكاسية.

أو أن:

(1) الصيغة $L\alpha \rightarrow \alpha$ تكون صحيحة إذا كان الإطار يمتلك علاقة موصولية انعكاسية.

البرهان:

سنستخدم طريقة البرهان غير المباشر. نفرض أنه من أجل α يوجد إطار علاقة الموصولية فيه R انعكاسية وعالم w بحيث إن $V(L\alpha,w) = 1$ و $V(\alpha, w) = 0$. الآن وبما أن $V(L\alpha,w) = 1$ فإن $V(\alpha,w') = 1$ حسب القاعدة [VL] من أجل كل عالم w' حيث إن wRw'. ولكن بما أن R انعكاسية فإن wRw. إذاً $V(\alpha, w) = 1$، وهذا يناقض $V(\alpha, w) = 0$، وهكذا برهنا أن $L\alpha \rightarrow \alpha$ تكون صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها انعكاسية.

يبقى أن نبرهن أنه:

(2) إذا كانت $L\alpha \rightarrow \alpha$ صحيحة في إطار، فإن هذا الإطار يجب أن يمتلك علاقة موصولية انعكاسية أو أن نبرهن ما يكافئ هذا، وهو: إن مثالاً مضاداً للصيغة $L\alpha \rightarrow \alpha$ يمكن إعطاؤه في أي إطار تكون فيه علاقة الموصولية ليست انعكاسية. إن هذا يعني وجود عالم w في إطار F، حيث لا يصح فيه wRw. الآن نعطي المثال-المضاد بواسطة إعطاء نموذج S إطاره F ودالة التقويم له V، حيث V(P,w)=0، بينما V(P,w')=1 من أجل جميع العوالم الأخرى w' في هذا الإطار. وإذاً يصبح لدينا: V(LP,w)=1 و V(P,w)=0وبالتالي يكون V (LP→P,w)=0. وإذاً LP→P ليست صحيحة في S. والنموذج (4) يمثل مثالاً - مضاداً.

بعد البرهان أعلاه، نستطيع القول إن الصيغة LP→P تقابل (تعكس) الخاصية الانعكاسية للعلاقة R. وسنأتي على هذه الصيغة لاحقاً عند بناء النسق T.

الصيغة L (P→Q) → (LP→ LQ) صحيحة في كل الإطارات بغض النظر عن خواص علاقة الموصولية فيها. وسنأتي على هذه الصيغة لاحقاً عند بناء النسق K.

الصيغة LP→LLP تقابل خاصية التعدي للعلاقة R. وسنأتي على هذه الصيغة لاحقاً عند بناء النسق S_4.

مبرهنة 2:

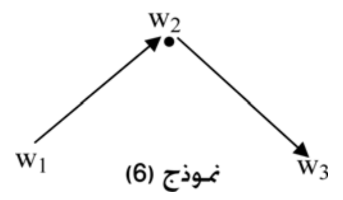
الصيغة LP→LLP صحيحة في الإطارات التي تكون فيها علاقة الموصولية متعدية.

البرهان:

سنقوم بتبيان أن مثالاً مضاداً للصيغة LP→LLP يمكن دائماً إعطاؤه في الإطارات التي تكون فيها علاقة الموصولية ليست متعدية.

لتكن w_1, w_2, w_3 ثلاثة عوالم (ليست مختلفة بالضرورة)، حيث إن:

$w_1R\, w_2,\ w_2Rw_3$ ولكن لا يصدق w_1Rw_3. هذه الحالة يمكن تمثيلها بالنموذج التالي:



نموذج (6)

في هذا النمـوذج نختـار V، حيـث إن $V(P, w_3)=0$ و $V(P, w)=1$ مـن أجـل كـل العوالم الأخرى w. إذاً يصبح $V(LP,w_1)=1$، $V(LLP,w_1)=0$ لأن $V(LP,w_2) = 0$.

مبرهنة 3:

الصيغة $MP \rightarrow LMP$ صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقـة الموصـولية فيهـا متعدية ومتماثلة.

البرهان:

لنفرض أن الصيغة غير صـحيحة في هـذه العلاقـة وهكـذا، فإنـه يوجـد إطـار F في نموذج S علاقة الموصولية R فيه متعدية ومتماثلة ويوجد عالم w حيث إن:

$$V(MP, w) = 1 \quad (1)$$

و

$$V(LMP, w) = 0 \quad (2)$$

من (1) وباستخدام [VM]، يوجد w' حيث إن wRw' وأن:

$$V(P, w') = 1 \quad (3)$$

ومن (2) وباستخدام [VL]، يوجد w'' حيث إن wRw'' وأن:

$$V(MP, w'') = 0 \quad (4)$$

الآن، بمـا أن wRw'' وبمـا أن R متماثلـة، إذاً w''Rw. وبمـا أن wRw' و R متعديـة يصبح w''Rw'. وهكذا فباستخدام (4) و[VM] نحصل على:

$$V(P, w') = 0 \quad (5)$$

وهذا يناقض (3). وإذاً الصيغة $MP \rightarrow LMP$ صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متعدية ومتماثلة.

الصيغة $MP \rightarrow LMP$ سنأتي عليها لاحقاً عند بناء النسق S_5.

مبرهنة 4:

الصيغة LP⟶MP صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متسلسلة.

البرهان:

إذا لم تكن LP⟶MP صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متسلسلة، فإنه يوجد عالم w في النموذج القائم على إطار متسلسل، حيث إن:

$$V(LP, w) = 1 \qquad (1)$$

و

$$V(MP, w) = 0 \qquad (2)$$

وبما أن R متسلسلة، فإن w يجب أن يكون مرتبطاً بعالم w' (wRw')، وبالتالي فحسب (1) و[VL] يجب أن يكون $V(P, w') = 1$، وحسب [VM] و(2) يكون $V(P,w') = 0$ وهذا تناقض.

سنأتي على الصيغة LP⟶MP لاحقاً عند بناء النسق D.

مبرهنة 5:

الصيغة $P \rightarrow LMP$ صحيحة في كل الإطارات التي تكون علاقة الموصولية فيها متماثلة.

البرهان:

ليكن (W, R, V) أي نموذج و(W, R) إطاره، حيث R متماثلة.

ليكن $V(P, w) = 1$ من أجل $w \in W$. الآن، ليكن w_1 أي عالم، حيث wRw_1. بما أن R متماثلة فيكون لدينا w_1Rw، وبما أن$V(P,w) = 1$ وبتطبيق القاعدة [VM] نحصل على $V(MP,w) = 1$. وبما أن $V(P,w) = 1$ وبتطبيق القاعدة [VM] نحصل على $V(LMP,w) = 1$. وبما أن w_1 هو أي عالم، فإذاً $V(LMP,w) = 1$. وهكذا فكلما كانت P صادقة في أي عالم فإن LMP صادقة أيضاً، شرط أن تكون R متماثلة. وإذاً، $P \rightarrow LMP$ صحيحة في كل إطار متماثل.

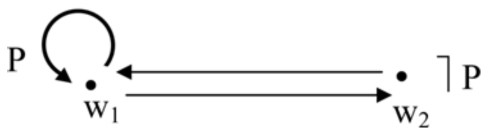
سنأتي على الصيغة $P \rightarrow LMP$ لاحقاً عند بناء النسق B.

6.1 تمارين:

(أ) ترجم القضايا التالية إلى منطق قضايا الجهة:

1. من الممكن ألا تهب الرياح، ولكنه ليس من الضروري ألا تهب.
2. إذا كان ممكن أن تهب الرياح، فإنه من الضروري أن يكون من الممكن أن تهب.
3. إذا كان من الممكن أن يكون ضرورياً أن تهب الرياح، فإنه من الضروري أن تهب.
4. إذا كان من الممكن للأشياء ألا تحدث، فإنه من المستحيل لها ألا تحدث.
5. إذا كان من المستحيل للأشياء ألا تحدث، فإنه من الضروري أن تحدث.
6. إذا كان من الممكن للأشياء أن تحدث أو ممكن ألا تحدث، فإنها لن تحدث بالضرورة. (إن القضايا 4، 5، 6، مقتبسة من أرسطو[14]).

(ب) خذ النموذج التالي:



حدد فيما إذا كانت كل من الصيغ التالية صادقة في w_1، في w_2، وصحيحة في النموذج بأكمله:

1. $LP \rightarrow LLP$
2. $\neg LP$
3. $P \rightarrow LMP$

(ج) خذ النموذج التالي:

$W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$R = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_1), (w_3, w_4), (w_4, w_2)\}$

$V(P, w_1) = V(P, w_3) = V(Q, w_1) = V(Q, w_2) = 1$

$V(P, w_2) = V(P, w_4) = V(Q, w_3) = V(Q, w_4) = 0$

1. ارسم مخطط النموذج.
2. جد قيمة كل مما يأتي:

14- on interpretation.

(أ) $V(LQ, w_1)$

(ب) $V(L \neg (P \rightarrow Q), w_2)$

(ج) $V(MLP, w_1)$

(د) $V(MP \wedge MQ, w_1)$

3. حدد فيما إذا كانت كل من الصيغتين التاليتين صحيحتين في النموذج:

(أ) $MLP \vee MMLP$

(ب) $(P \rightarrow MP) \wedge (Q \rightarrow MQ)$

الفصل الثاني

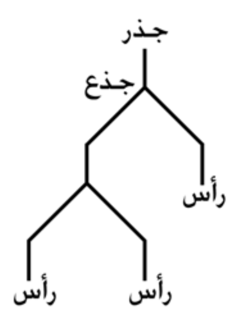
أشجار الصدق الموجهة

Modal Truth Trees

1.2 أشجار الصدق في منطق حساب القضايا التقليدي:

تقوم أشجار الصدق بعمل معاكس لما نفعله عند إعطاء مثال مضاد لصحة الحجج، الذي يقوم على أخذ النتيجة كاذبة وإعطاء قيم صدق للمتغيرات القضائية، بحيث تكون المقدمات صادقة. العمل المعاكس لهذا المثال المضاد يقوم على أخذ النتيجة كاذبة والمقدمات صادقة ثم البحث عن قيم الصدق الممكنة للمتغيرات القضائية التي تقود إلى ذلك. فإذا وجدت مثل هذه القيم فالحجة خاطئة وإذا لم توجد فالحجة صحيحة.

في قمة شجرة الصدق يكون (الجذر) وفي أسفلها تكون (الرؤوس) أو (الأوراق). الطريق الذي يتجه مباشرة من الجذر إلى الرأس يسمى (الفرع). والشجرة التي تمتلك أكثر من فرع تتفرع حيث تتفرق الطرق. وتمتلك الشجرة عدداً من الفروع مساو لعدد الرؤوس. أما جزء الشجرة فوق جميع التفرعات فيسمى (جذعاً).



الصيغ على جذع الشجرة تظهر على كل فرع. بعض الصيغ يشار إليها بواسطة علامة الإنجاز ✓ وذلك للدلالة على أنه قد تم إنجاز (تطبيق) قواعد اشتقاق

على تلك الصيغ. وهكذا يمكننا إهمال الصيغ المنجزة وتبقى الصيغ غير المنجزة. والفروع التي تظهر عليها صيغ ونفيها غير منجزة تسمى فروعاً مغلقة. الأشجار التي تكون جميع فروعها مغلقة تسمى أشجاراً مغلقة.

نستطيع الآن إعطاء ما يلي:

1. يكون فرع الشجرة مغلقاً إذا وفقط إذا كانت صيغة ونفيها تظهران غير منجزتين عليه.

2. تكون الشجرة مغلقة إذا وفقط إذا كانت جميع فروعها مغلقة، وإلا تكون مفتوحة.

سنشير إلى الفرع المغلق بواسطة العلامة ×. والإغلاق يبين نهاية عملية بناء الشجرة.

إننا نقوم ببناء أشجار الصدق وذلك باستخدام قواعد اشتقاق.

مثال:

سنستخدم شجرة الصدق لتحديد في ما إذا كانت صورة الحجة، التي تسمى قاعدة الوضع صحيحة $\dfrac{K \rightarrow L, K}{L}$ كالتالي:

$K \rightarrow L$

K

$\neg L$

تقوم شجرة الصدق على افتراض أن $K \rightarrow L$ وK صادقتان وأن L كاذبة. فإذا كان ممكناً تعيين قيم صدق بحيث تكون الصيغ $K \rightarrow L$، K $\neg L$ صادقة في الوقت نفسه، فصورة الحجة خاطئة وبالتالي فإن قاعدة الوضع ليست صحيحة، وإذا كان مستحيلاً الحصول على هذا التعيين، فإذاً صورة الحجة صحيحة وقاعدة الوضع صحيحة. إن قواعد اشتقاق أشجار الصدق تبين، فيما إذا كان ممكناً إيجاد تعيين قيم صدق بحيث تكون الصيغ الأولية (التي نبدأ بها) صادقة. وهكذا، فإن شجرة الصدق تبدأ بمجموعة افتراضات حول صدق أو كذب صيغ معينة (في مثالنا هذا، تم افتراض صدق $K \rightarrow L$ و K وافتراض كذب L).

نحن نضع هذا الافتراض على شكل صيغ على شجرة الصدق، وبتطبيق قواعد اشتقاق نحصل على صيغ أخرى تقوم بتحديد فروع الشجرة. سنستخدم

شجرة الصدق لمعرفة ذلك التعيين لقيم الصدق الذي يجعل افتراضاتنا الأولية ممكنة (وفي حالتنا نحاول إيجاد تعيين قيم صدق إلى K و L بحيث تكون كل من الصيغتين K⟵L و K صادقة و L كاذبة). إن فرع الشجرة يناظر سطراً من جدول الصدق.

إن ما نقوم به هو تطبيق قواعد الاشتقاق والتأشير على الصيغ بعلامة الإنجاز ✓. فبالنسبة إلى قاعدة الوضع، مثلاً نقوم بتطبيق قاعدة الاستلزام (كما سنرى في الفقرة القادمة) ونحصل على شجرة الصدق التالية:

$$
\begin{array}{c}
\checkmark\ K \to L \\
K \\
\neg L \\
\neg K \qquad L
\end{array}
$$

لقد قمنا بالتحقق (أي بوضع علامة الإنجاز✓) من الصيغة K ⟵ L، لتبيان أننا قد طبقنا قاعدة اشتقاق عليها وهكذا، فلن يكون لها لاحقاً أي دور في شجرة الصدق. كذلك قمنا بتفريع الشجرة إلى فرعين، وذلك للإشارة إلى أنه يجب علينا دراسة إمكانيتين. فإذا كانت L ⟵ K صادقة فإنه (حسب جدول صدق الاستلزام) K ⌉ أو L صادقة. وبما أن الفروع تكون مغلقة، إذا ظهرت عليها صيغة ونفيها فإن الفرعين مغلقان. فالفرع الأيسر عليه K و K⌉ (صيغة متناقضة) والفرع الأيمن عليه L و L ⌉ (صيغة متناقضة):

$$
\begin{array}{c}
\checkmark\ K \to L \\
K \\
\neg L \\
\neg K \qquad L \\
x \qquad\ x
\end{array}
$$

أشجار الصدق، مثل تلك أعلاه، حيث جميع فروعها مغلقة تسمى مغلقة أيضاً. عندما تغلق جميع الفروع فإن ما نستنتجه هو أنه لا توجد إمكانية لجعل جميع الصيغ الأولية (المقدمات ونفي النتيجة) صادقة في الوقت نفسه. إن مثالنا أعلاه يبين أن شجرة صدق الوضع مغلقة، وهذا يبين أنه لا توجد إمكانية لجعل كل من L ⟵ K وK صادقة وL كاذبة، وهذا يبرهن أن قاعدة الوضع هي صورة حجة صحيحة.

2.2 قواعد اشتقاق أشجار الصدق:

1. قاعدة النفي ⌉ :

إن قواعد اشتقاق أشجار الصدق تعكس تعاريف دوال الصدق. وهنا، يمكننا أن نعبر عن تعريف النفي بواسطة الجدول على الشكل التالي:

K⌉ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K كاذبة.

إن هذا يعني أن $\neg\neg K$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت $\neg K$ كاذبـة، وإن $\neg K$ كاذبة إذا وفقط إذا كانت K صادقة. وإذاً $\neg\neg K$ صادقة إذا وفقط إذا كانـت K صـادقة. كما أن K تكافئ $\neg\neg K$ وهكذا يمكننا حـذف رمـوز أزواج النفـي المتجـاورة. الآن يمكننـا إعطاء القاعدة التالية:

2. قاعدة النفي المزدوج $\neg\neg$:

$$\checkmark\ \neg\neg K$$
$$K$$

3. قاعدة الوصل Λ:

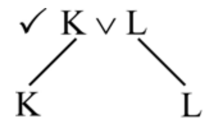
قاعدة الوصل تشتق من تعريف دالة صدق الوصل:

$K \land L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة وL صادقة.

$$\checkmark\ K \land L$$
$$K$$
$$L$$

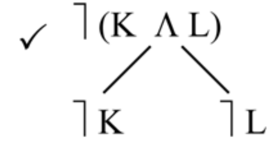
4. قاعدة نفي الوصل $\neg\Lambda$:

يجـب علينـا هنـا الجـواب عـن الـسؤال التـالي: متـى تكـون الـصيغة $\neg(K \land L)$ صادقة؟ أو، متى تكـون $K \land L$ كاذبـة؟. هنالـك إمكانيتـان هـما: K كاذبـة أو L كاذبـة. وللتعبير عن هذين الاختيارين فإننا نقوم بالتفريع إلي فرعين أحدهما يعكـس إمكانيـة أن K كاذبة وذلك بكتابة $\neg K$ ، وعلى الثاني نكتب $\neg L$ للتعبير عن إمكانية أن L كاذبة. وهكذا فإن هذه القاعدة تأخذ الشكل:



5. قاعدة الفصل V:

$K \lor L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة أو L صادقة.



6. قاعدة نفي الفصل $\neg\vee$:

يجب علينا الآن الجواب عن السؤال: متى تكون الصيغة $\neg(K \vee L)$ صادقة؟، أو متى تكون $K \vee L$ كاذبة؟. الجواب: عندما تكون K كاذبة وL كاذبة.

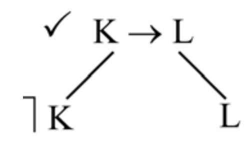
$$\checkmark\ \neg(K \vee L)$$
$$\neg K$$
$$\neg L$$

7. قاعدة الاستلزام $\rightarrow$:

نستطيع التعبير عن تعريف دالة صدق الاستلزام على الشكل التالي:

$K \rightarrow L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K كاذبة أو L صادقة.

تطبق هذه القاعدة على الصيغ الشرطية (الاستلزامات). الآن سؤالنا هو: متى يكون الاستلزام صادقاً؟. جدول صدق تعريف الاستلزام يشير إلى أن $K \rightarrow L$ تكون كاذبة إذا كانت K صادقة و L كاذبة. وإذاً $K \rightarrow L$ تكون صادقة إذا كانت K كاذبة أو L صادقة. هاتان الإمكانيتان تقودان إلى التفريع التالي:



8. قاعدة نفي الاستلزام $\neg\rightarrow$:

الصيغة $\neg(K \rightarrow L)$ تكون صادقة أو أن $K \rightarrow L$ تكون كاذبة في الحالة التي تكون فيها K صادقة وL كاذبة:

$$\checkmark\ \neg(K \vee L)$$
$$K$$
$$\neg L$$

9. قاعدة الاستلزام الثنائي $\leftrightarrow$:

قاعدة الاستلزام الثنائي تعكس أيضاً تعريفه.

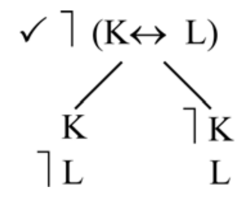
الصيغة $K \leftrightarrow L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا تساوت قيم صدق K مع قيم صدق L.

إذا كانت $K \leftrightarrow L$ صادقة فإن K و L يجب أن تمتلكا قيم الصدق نفسها، أي أن K وL يجب أن تكونا صادقتين معاً أو كاذبتين معاً. أي أن هنالك إمكانيتين ويجب التفريع:

$$\checkmark\ K \leftrightarrow L$$

K	$\neg K$
L	$\neg L$

10. قاعدة نفي الاستلزام الثنائي $\neg\leftrightarrow$:



إذا كانت $K \leftrightarrow L$ كاذبة فإن K و L يجب أن تمتلكا قيم صدق مختلفة. أي أن، K صادقة و L كاذبة أو أن L صادقة و K كاذبة. هنا أيضاً يجب التفريع للتعبير عن هاتين الإمكانيتين.

تستخدم أشجار الصدق من أجل:

أولاً: تحديد صحة صورة الحجج:

مثال:

1. أنشئ شجرة الصدق وحدد صحة صورة الحجة التالية.

المقدمات: $K \rightarrow L, L \rightarrow N, K$

النتيجة: N

1	✓ $K \rightarrow L$	
2	✓ $L \rightarrow N$	
3	K	
4	$\neg N$	
5	$\neg K$	L
6	x	
7		$\neg L$ N
8		x x

لقد بدأنا بكتابة المقدمات ونفي النتيجة. وقمنا بتطبيق قاعدة الاستلزام على الخط 1 فحصلنا على الخط 5. الفرع الأيسر أغلق على الخط 6 لوجود K و$\neg K$ عليه. ولكن الفرع الأيمن بقي مفتوحاً ولهذا طبقنا قاعدة الاستلزام على الخط 2 فحصلنا على الخط 7. الفرعان الباقيان تم غلقهما لوجود L و $\neg L$ على الأيسر ولوجود N و $\neg N$ على الأيمن. وهكذا تكون الشجرة مغلقة، وبالتالي فلا توجد إمكانية لجعل المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة. إذاً صورة الحجة صحيحة.

نستطيع الآن التعبير عن برهاننا بأن صورة الحجة صحيحة هكذا:

$$K \rightarrow L, L \rightarrow N, K \vdash K$$

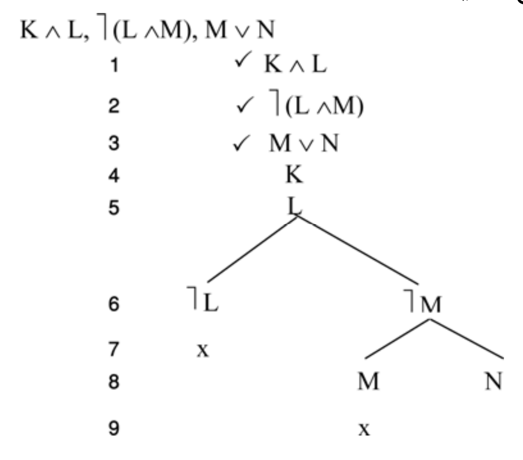
إن الرمز $\vdash$ يقرأ (يقرر) بأنه من الصيغ التي على يساره (المقدمات) تنتج (تشتق) الصيغة التي على يمينه (النتيجة). أي أنه، إذا كانت الصيغ التي على يساره صادقة جميعها، فإن الصيغة التي على يمينه صادقة. أما إذا كانت مجموعة

المقدمات هي المجموعة الخالية ϕ، فإننا نكتب $\phi \vdash \alpha$ إذا وفقط إذا كانت α تكرارية، وعادة نحذف الرمز ϕ ونكتب $\vdash \alpha$

ثانيا: تحديد اتساق أو عدم اتساق الصيغ:

تكون مجموعة من الصيغ في حساب القضايا التقليدي متسقة إذا وفقط إذا كانت صادقة في الوقت نفسه.

لنأخذ الصيغ التالية:



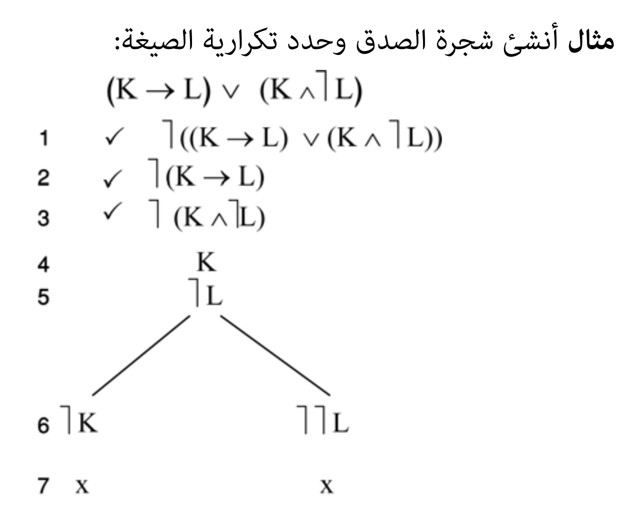
لقد قمنا بتطبيق قاعدة $\wedge$ على الخط 1 فحصلنا على الخطين 4 و 5، ثم طبقنا قاعدة $\wedge$ ⌉ على الخط 2 فحصلنا على الخط 6، وأخيراً طبقنا قاعدة $\vee$ على الخط 3 فحصلنا على الخط 8. لا نستطيع الآن القيام بتطبيق أكثر لقواعد الاشتقاق. نرى أن الفرع في أقصى اليسار مغلق لوجود L و⌉L عليه وكذلك، فإن الفرع الأوسط مغلق لوجود M و⌉M عليه. ولكن الفرع في أقصى اليمين مفتوح لعدم وجود صيغة ذرية ونفيها عليه. وبما أن هذا الفرع يشير إلى كون هذه الصيغ الأولية صادقة في الوقت نفسه فإن هذه الصيغ تكون متسقة (حسب تعريف الاتساق).

ثالثا: تحديد نوع الصيغ: تكرارية، أم متناقضة، أم عارضة:

1. تكون الصيغة α تكرارية إذا وفقط إذا كانت جميع الفروع على الشجرة المنتهية للصيغة ⌉α مغلقة.

مثال أنشئ شجرة الصدق وحدد تكرارية الصيغة:

$(K \to L) \vee (K \wedge \neg L)$



بدأنا بكتابة نفي الصيغة المعطاة على الخط 1، تم تطبيق القاعدة ∨⌉ على الخط 1 فحصلنا على الخطين 2 و 3. وطبقنا القاعدة →⌉ على الخط 2 فحصلنا على الخطين 4 و 5. بتطبيق القاعدة Λ⌉ على الخط 3 حصلنا على الخط 6. الفرع الأيسر مغلق لوجـود K⌉ وK عليه والفرع الأيمـن مغلـق لوجـود L⌉⌉ و L⌉ عليـه، وبمـا أن جميـع الفـروع مغلقة فإنه لا توجد إمكانية لجعل نفي الصيغة صادقة وبالتالي فالصيغة تكرارية.

2. تكون الصيغة α متناقـضة إذا وفقـط إذا كانـت جميـع فـروع شـجرة الـصدق المنتهية للصيغة α مغلقة.

3. تكون الصيغة α عارضة إذا وفقط إذا كانت شجرة الصدق المنتهية للـصيغة α مفتوحة، وكانت شجرة الصدق المنتهية للصيغة α⌉ مفتوحة أيضاً.

رابعا: تحديد تكافؤ الصيغ:

الصيغتان المتكافئتان هما اللتان تمتلكان قيم الصدق نفسها. أي أنه لا يوجد تعيين قيم صـدق لمتغـيراتهما القـضائية يجعـل إحـداهما صـادقة والأخـرى كاذبـة. ولاختبار ذلك نقوم بإنشاء شجرتين. لنأخذ الصيغتين α و β. شجرة الـصدق الأولى تبدأ بفرض أن β صادقة وα كاذبة وشجرة الصدق الثانية تبدأ بفرض أن β كاذبة و α صادقة. إذا كانت الشجرتان مغلقتين فهـذا يعنـي عـدم وجـود تعيـين يجعـل

للصيغتين قيماً مختلفة وهكذا يتحقق التكافؤ. وإذا كانت إحدى الشجرتين على الأقل مفتوحة فهذا يعني وجود تعيين يجعل إحدى الصيغتين صادقة والأخرى كاذبة، وبالتالي تكون الصيغتان غير متكافئتين.

مثال:

حدد فيما إذا كانت الصيغتان $\neg K \rightarrow \neg L$ ، $L \rightarrow K$ متكافئتين أم غير متكافئتين.

1. الشجرة الأولى:

1	✓	$K \rightarrow L$	
2	✓	$\neg(\neg L \rightarrow \neg K)$	
3		$\neg L$	
4		$\neg\neg K$	
5		$\neg K$	L
6		x	x

طبقنا قاعدة $\neg\rightarrow$ على الخط 2 فحصلنا على الخطين 3 و 4. وطبقنا قاعدة $\rightarrow$ على الخط 1 فحصلنا على الخط 5. الشجرة مغلقة.

2. الشجرة الثانية:

1	✓	$\neg L \rightarrow \neg K$	
2	✓	$\neg(K \rightarrow L)$	
3		K	
4		$\neg L$	
5		$\neg\neg L$	$\neg K$
6		x	x

وهذه أيضاً مغلقة وإذاً يتحقق التكافؤ.

3.2 أشجار الصدق في منطق قضايا الجهة:

إن أشجار الصدق الموجهة، تشابه تلك التي مرت بنا في منطق حساب القضايا التقليدي، ماعدا الإضافات التالية:

1. عند كل صيغة على شجرة الصدق سنضيف عدداً طبيعياً w ‏(w=0,1,2,...)، أو سنضيف على الشجرة التعبير wRt حيث w و t عددان طبيعيان يمثلان عوالم ممكنة. فمثلاً K, w يعني أن الصيغة K صادقة في العالم w.

2. الصيغ الأولية (المقدمات ونفي النتيجة) للشجرة تشمل α،0، لكل مقدمة α و β،0 ⌉ حيث β هي النتيجة.

3. قواعد اشتقاق الروابط (↔،→،V،∧،⌉)، التي هي دوال صدق هي نفسها كما في المنطق التقليدي (غير الجهوي)، ماعدا أن العدد الطبيعي الذي سيربط بكل صيغة أيضاً سيربط بالصيغة (أو الصيغ) المشتقة منها، فمثلاً قاعدة الاستلزام تصبح:

K→ L, w

⌉ K,w   L,w

بالإضافة إلى قواعد الاشتقاق التي مرت بنا في الفقرة السابقة، فإنه توجد 4 قواعد اشتقاق جديدة تتعلق بالموجهين L وM كالتالي[15]:

1. قاعدتا نفي الموجهين L وM (قاعدة نفي الضرورة: L ⌉ ونفي الإمكانية: M⌉):



2. قاعدتا الموجهين L وM (قاعدة الضرورة: L وقاعدة الإمكانية: M):



في القاعدة M على اليمين أسفل، يجب أن يكون العالم t جديداً، أي يجب ألا يكون له أي ظهور على أي فرع سابق. أما t في القاعدة L، على اليسار أسفل، فيمكن أن يكون أي عالم.

15- لن نستخدم الحرفين L و M كمتغيرين قضائيين وإنما كموجهين أو كقاعدتي اشتقاق.

يصبح الفرع مغلقاً إذا وفقط إذا ظهرت على هذا الفرع w، α و w، $\neg\alpha$ حيث α أي صيغة وw أي عالم.

سنعطي بعض الأمثلة أدناه حول إنشاء أشجار الصدق في منطق قضايا الجهة.

مثال **1**:

أنشئ شجرة صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة (الصيغ الأولية: المقدمات ونفي النتيجة).

المقدمة: $L (K \rightarrow N) \wedge L (N \rightarrow O)$

النتيجة: $L (K \rightarrow O)$

الخطان (الصيغتان) 3 و 4 اشتقا من الخط 1، بتطبيق قاعدة الوصل (الفقرة السابقة). الخط 5 اشتق من الخط 2 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة. الخطان 6 و7 حصلنا عليهما من الخط 5 بتطبيق قاعدة الإمكانية. الخطان 8 و 9 اشتقا من 7 بتطبيق قاعدة نفي الاستلزام (الفقرة السابقة). الخطان 10 و 11 اشتقا من 3 و 4 بتطبيق قاعدة الضرورة.

الشجرة مغلقة، وذلك لأن الفرع في أقصى اليسار مغلق لظهور $\neg$ K,1 و K,1 عليه. والفرع في الوسط مغلق لظهور $\neg$ N,1 و N,1 عليه. أما الفرع الأيمن فمغلق لظهور O,1 و $\neg$ O,1 عليه. إذاً، صورة الحجة صحيحة، لأنه عندما أخذنا المقدمة ونفي النتيجة كصيغتين صادقتين وصلنا إلى صيغ متناقضة.

1 $L (K \rightarrow N) \wedge L (N \rightarrow O),0$

2 $\neg L (K \rightarrow O),0$

3 $L (K \rightarrow N),0$

4 $L (N \rightarrow O),0$

5 $M \neg (K \rightarrow O),0$

6 0R1

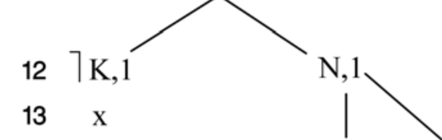
7 $\neg (K \rightarrow O),1$

8 K,1

9 $\neg O,1$

10 $K \rightarrow N,1$

11 $N \rightarrow O,1$



12 $\neg K,1$ N,1

13 x

14 $\neg N,1$ O,1

15 x x

مثال **2**:

سنبرهن أن $M (K \wedge N) \rightarrow (M K \wedge MN),0$ صحيحة، وذلك ببناء شجرة الصدق التالية، حيث نبدأ بنفي الصيغة المعطاة:

الخطان (الصيغتان) 2 و 3 اشتقا من 1، بتطبيق القاعدة $\rightarrow \rceil$. الخط 4 اشتق من 3، بتطبيق القاعدة $\wedge \rceil$. الخط 5 اشتق من 4، بتطبيق قاعدة نفي الإمكانية $M \rceil$. الخطان 6 و7 حصلنا عليهما من 2، بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخطان 8 و9 اشتقا من 7، بتطبيق القاعدة $\wedge$. والخط 10 اشتق من 5 وذلك بتطبيق القاعدة L. الشجرة مغلقة، لوجود K,1 و $\rceil$ K,1 على الفرع الأيسر ولوجود $\rceil$ N,1 و N,1 على الفرع الأيمن. الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

1	$\rceil (M (K \wedge N) \rightarrow (M K \wedge MN)),0$	
2	$M (K \wedge N), 0$	
3	$\rceil (M K \wedge MN),0$	
4	$\rceil MK,0$	$\rceil MN,0$
5	$L \rceil K,0$	$L \rceil N,0$
6	0R1	0R1
7	$K \wedge N,1$	$K \wedge N,1$
8	K,1	K,1
9	N,1	N,1
10	$\rceil K,1$	$\rceil N,1$
11	x	x

توجد حجج صحيحة لا يمكن برهان صحتها في حساب القضايا التقليدي ولا في حساب المحمولات التقليدي مثل الحجة التالية:

مثال **3**:

لنأخذ الحجة التالية، ولنحاول تحديد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة:

إذا أريد أن يدرس موضوع دراسي جديد في السنة القادمة، فإن طلباً يجب أن يقدم إلى المجلس العلمي للمعهد قبل شهر يونيو. إذا أريد أن يقدم الطلب إلى المجلس العلمي للمعهد قبل شهر يونيو، فإن المجلس العلمي للمعهد يجب أن يدعى للاجتماع. إذا أريد أن يدعى المجلس العلمي للاجتماع، فإن برنامجاً للاجتماع يجب أن يعد.

ليس من الممكن أن يعد مثل هذا البرنامج. إذاً، ليس من الممكن أن يقدم موضوع دراسي جديد في السنة القادمة.

إن عناية خاصة يجب أن تعطى عند الترجمة من اللغة العادية، لا سيما إذا كانت الترجمة متعلقة بالاستلزامات. فمثلاً، من أجل ترجمة الحجة أعلاه، نضع:

أريد أن يدرس موضوع دراسي جديد في السنة القادمة	K
يقدم طلب إلى المجلس العلمي قبل شهر يونيو	N
المجلس العلمي للمعهد يدعى للاجتماع	O
يعد برنامج للاجتماع	P

الترجمة:

المقدمات:

$L(K \rightarrow N)$,

$L(N \rightarrow O)$,

$L(O \rightarrow P)$,

$\urcorner MP$

النتيجة: $\urcorner MK$

سنقوم الآن ببرهان أن هذه الحجة صحيحة، وذلك باستخدام شجرة الصدق، وذلك بأن تكون الصيغ الأولية هي: المقدمات ونفي النتيجة.

الخطوط 1، 2، 3، 4 تمثل المقدمات، أما الخط 5 فهو نفي النتيجة. الخط 6 اشتق من 5 باستخدام قاعدة النفي المضاعف. الخط 7 اشتق من 4 بتطبيق القاعدة $\urcorner M$. الخطان 8 و9 حصلنا عليهما من 6 باستخدام القاعدة M. والخط 11 اشتق من 7 بواسطة القاعدة L. الخطوط 13، 14، 15 اشتقت من الخطوط 1،

```
1    L (K → N),0
2    L (N → O),0
3    L (O → P),0
4    ⌉MP,0
5    ⌉⌉M K,0
6    M K,0
7    L ⌉P,0
8    0R1
9    K,1
10   0R1
11   ⌉P,1
12   0R1
13   (K → N),1
14   (N → O),1
15   (O → P),1
          /        \
16  ⌉K,1           N,1
17   x           /      \
18           ⌉N,1        O,1
19            x        /     \
20                  ⌉O,1     P,1
21                   x        x
```

2، 3 على الترتيب باستخدام القاعدة L. الخطوط 16، 18، 20 اشتقت من 13، 14، 15 على الترتيب، باستخدام القاعدة $\rightarrow$. الشجرة مغلقة لوجود K, 1 و$\neg$K, 1؛ N, 1 و N, 1؛ $\neg$O,1 O,1 ؛ P, 1 و $\neg$P, 1 على الفروع الأربعة اعتباراً من اليسار إلى اليمين. الشجرة مغلقة والحجة صحيحة.

إن الترجمة الخاطئة للحجة أعلاه ستقودنا إلى صورة الحجة التالية:

مثال **4**:

المقدمات: $K \rightarrow LN, N \rightarrow LO, O \rightarrow LP, \neg MP$

النتيجة: $\neg MK$

سنترك برهان خطأ هذه الصورة كتمرين للقارئ.

مثال **5**:

لنحدد صحة الاشتقاق

$L (P \rightarrow Q) \wedge L (Q \rightarrow O) \vdash L (P \rightarrow O)$

1	$L (P \rightarrow Q) \wedge L (Q \rightarrow O) ,0$	
2	$\neg L (P \rightarrow O),0$	
3	$L (P \rightarrow Q),0$	
4	$L (Q \rightarrow O) ,0$	
5	$M\neg (P \rightarrow O),0$	
6	0R1	
7	$\neg(P \rightarrow O),1$	
8	P ,1	
9	$\neg$O,1	
10	$P \rightarrow Q,1$	
11	$Q \rightarrow O,1$	
12	$\neg$ P.1	Q,1
13	x	$\neg$Q,1 O,1 (14)
15		x x

الخطان (الصيغتان) 3 و4 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\wedge$. الخط 5 اشتق من 2 بتطبيق القاعدة $\neg$L . الخطان 6 و7 حصلنا عليهما من 5 بتطبيق القاعدة M. الخطان 8 و9 اشتق من 7 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخطان 10 و11 اشتقا من 3 و4 بتطبيق القاعدة L على الترتيب. الخط 12 اشتق من 10 بتطبيق القاعدة $\rightarrow$. الخط 14 اشتق من 11 بتطبيق القاعدة $\rightarrow$. الشجرة مغلقة والاشتقاق صحيح.

مثال **6:**

لنحدد صحة الصيغة التالية:

$$(MP \wedge M\neg Q) \rightarrow MLMP$$

1	$\neg((MP \wedge M\neg Q) \rightarrow MLMP))$,0
2	$MP \wedge M\neg Q,0$
3	$\neg MLMP,0$
4	$MP,0$
5	$M\neg Q,0$
6	$L\neg LMP,0$
7	$0R1$
8	$P,1$
9	$\neg LMP,1$
10	$M\neg MP,1$
11	$1R2$
12	$\neg MP,2$
13	$L\neg P,2$
14	$0R3$
15	$\neg Q,3$
16	$\neg LMP,3$
17	$M\neg MP,3$
18	$3R4$
19	$\neg MP,4$
20	$L\neg P,4$

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخطان 4 و5 اشتقا من 2 بتطبيق القاعدة $\wedge$. الخط 6 اشتق من 3 بتطبيق القاعدة $\neg M$. الخطان 7 و8 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق القاعدة M. الخط 9 اشتق من 6 بتطبيق القاعدة L. الخط 10 اشتق من 9 بتطبيق القاعدة $\neg L$. الخطان 11 و12 حصلنا عليهما من 10 بتطبيق القاعدة M. الخط 13 اشتق من 12 بتطبيق القاعدة $\neg M$. الخطان 14 و15 حصلنا عليهما من 5 بتطبيق القاعدة M. الخط 16 اشتق من 6 بتطبيق القاعدة L. الخط 17 اشتق من 16 بتطبيق القاعدة $\neg L$. الخطان 18 و19 اشتق من 17 بتطبيق القاعدة M. الخط 20 اشتق من 19 بتطبيق القاعدة $\neg M$.

نلاحظ أنه، عندما نطبق القاعدة M، فإنه يجب علينا العودة إلى الوراء وتطبيق القاعدة L مرة أخرى على عالم جديد تم إدخاله سابقاً، وهكذا تكون الشجرة غير منتهية.

4.2 تمارين:

(أ) برهن أن كلاً من الصيغ التالية صحيحة باستخدام أشجار الصدق:

1. $L (P \wedge Q) \leftrightarrow (L P \wedge L Q)$
2. $L (\urcorner P \rightarrow P) \leftrightarrow LP$
3. $(L (Q \rightarrow P) \wedge L (\urcorner Q \rightarrow P)) \leftrightarrow LP$

(ب) حدد في ما إذا كانت صورة الحجة التالية صحيحة أم خاطئة، باستخدام أشجار الصدق.

المقدمات: $K \rightarrow LN, N \rightarrow LO, O \rightarrow LP, \urcorner MP$

النتيجة: $\urcorner MK$

(ج) حدد فيما إذا كانت الصيغة $\urcorner (MP \wedge LMP)$ صحيحة أم خاطئة في النسق الموسع للنسق K، حيث تكون العلاقة R متعدية.

الفصل الثالث

أنساق منطق قضايا الجهة

Systems of propositional Modal Logic

سنقوم، في هذا الفصل ببناء ما يسمى الأنساق العادية لمنطق قضايا الجهة وهي الأنساق: K، T، D، S_4، S_5، B، والذي يمثل K نسقها الأساسي، وحيث تظهر الأنساق الأخرى كتوسيعات إلى K، ثم نقوم باستخدام أشجار الصدق لبرهان هذه التوسيعات.

يعرف النسق الصوري (المنطقي) بشكل عام، وذلك بتحديد مكوناته الأساسية كالتالي:

(1) رموز النسق (أبجدية النسق) وبضمنها الرموز الأولية (غير المعرفة).

(2) قواعد بناء الصيغ تبين أي تتابع من رموز النسق تشكل صيغة في النسق.

(3) مجموعة بديهيات النسق، والتي هي مجموعة جزئية من الصيغ في (2).

(4) قواعد الاشتقاق.

(5) مبرهنات النسق، والتي يتم برهانها من بديهياته باستخدام قواعد الاشتقاق.

1.3 الأنساق العادية لمنطق قضايا الجهة:

1.1.3 النسق K:

مكونات النسق **K**[16]

(1) رموز لانهائية للنسق (أبجدية النسق)

16- سمي بالنسق K تكريماً للعالم المنطقي كريبكة.

(أ) الحروف $A, B, C, \ldots$ وهذه الحروف ودلائلها $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ ندعوها المتغيرات القضائية. الرمزان: $\neg$ ، $\vee$ ندعوهما الرابطين الأوليين والرمز الأولي L يسمى موجّه الضرورة.

(ب) الرمزان (و) ندعوهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

(2) مجموعة الصيغ التي تتكون حسب القاعدتين:

(أ) المتغيرات القضائية في (1) تكون صيغاً.

(ب) إذا كانت α، β صيغتين فإن $\neg \alpha$ ، $\alpha \vee \beta$ صيغتان أيضاً.

الرمزان α، β المذكوران في (ب) ليسا من اللغة الشيئية للنسق، وإنما من ما وراء لغة النسق.

تدخل الروابط الأخرى: Λ، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$ باستخدام الرابطين الأوليين $\neg$ ، V حسب التعريفات أدناه.

تعريف$_1$:

$$K \wedge L \equiv_{\text{تع}} \neg(\neg K \vee \neg L)$$

تعريف$_2$:

$$K \rightarrow L \equiv_{\text{تع}} \neg K \vee L$$

تعريف$_3$:

$$K \leftrightarrow L \equiv_{\text{تع}} (K \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow K)$$

الموجه M يسمى موجه الإمكانية ويتم تعريفه بواسطة الموجه L.

تعريف$_4$:

$$MP \equiv_{\text{تع}} \neg L \neg P$$

(3) البديهيات:

بديهيات النسق **K** تتألف من:

(1) جميع الصيغ التكرارية لحساب القضايا أي جميع الصيغ المعرفة بواسطة البديهية التالية:

حق: إذا كانت α صيغة تكرارية من حساب القضايا فإن α تكون بديهية.

(2) ومن البديهية K التالية:

البديهية K: $L(P \to Q) \to (LP \to LQ)$

(4) قواعد الاشتقاق:

في نسق **K** توجد ثلاث قواعد للاشتقاق:

(1) الوضع: من $\beta \to \alpha$ وα نشتق β.

(2) الاستبدال: من الصيغة α التـي تحـوي المتغـير أو المتغـيرات $K_1, K_2, \ldots, K_n$ نشتق الصيغة β بواسطة استبدال كل ظهور لهذا المتغـير أو المتغـيرات في α بـأي صـيغة $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ على الترتيب.

(3) الضرورة: من α تشتق $L\alpha$.

(البرهان) في النسق K هو متتالية منتهية من الـصيغ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ حيـث إن أي صـيغة α_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ هـي بديهيـة أو صـيغة مـشتقة مـن الـصيغ التـي تـسبقها في المتتالية، وذلك باستخدام قاعدة الوضع أو الاستبدال أو الضرورة أو التعريف. هذا البرهان هو برهان α_n في النسق K. تسمى α_n مبرهنة النسق K.

إذا كانت المتتالية المنتهيـة مـن الـصيغ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ برهانـاً في النـسق K وكـان $k<n$ فإن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ يكون أيضاً برهانـاً في النـسق K، لأنـه يلبـي تعريـف (البرهـان) وهكذا تكون α_k مبرهنة في النسق K. إن هذا يعنـي كـذلك أن كـل بـديهيات النـسق K هي مبرهنات في النسق K، حيث يكون برهان كل بديهيـة في K عبـارة عـن متتاليـة ذات حد واحد هو البديهية نفسها.

سنورد أدناه قائمة الصيغ التكرارية لحـساب القـضايا والتـي سنـستخدمها في هـذا النسق K والأنـساق التاليـة بعـده. سنـضيف عـدداً مرجعيـاً لكـل صـيغة حتـى نـستطيع الرجوع إليها في البراهين لاحقاً.

سـنرمز بواسـطة حـق$_i$ اختـصاراً إلى: الـصيغة التكراريـة لحـساب القـضايا حيـث $(i=1,2,\ldots,24)$ لكل من الصيغ التكرارية أدناه عندما ترد في البراهين.

حق$_1$ $(P \wedge Q) \to P$

حق$_2$ $(P \wedge Q) \to Q$

حق$_{3}$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \land R)))$

حق$_{4}$ $P \rightarrow (Q \rightarrow (P \land Q)$

حق$_{5}$ $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)) \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

حق$_{6}$ $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

حق$_{7}$ $(P \rightarrow (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \land Q) \rightarrow R)$

حق$_{8}$ $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \land R) \rightarrow S))$

حق$_{9}$ $P \rightarrow (P \lor Q)$

حق$_{10}$ $Q \rightarrow (P \lor Q)$

حق$_{11}$ $((P \rightarrow Q) \land (R \rightarrow Q)) \rightarrow ((P \lor R) \rightarrow Q))$

حق$_{12}$ $P \leftrightarrow \neg\neg P$

حق$_{13}$ $(P \lor Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \land \neg Q)$

حق$_{14}$ $(P \land Q) \leftrightarrow \neg(\neg P \lor \neg Q)$

حق$_{15}$ $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

حق$_{16}$ $(P \lor Q) \leftrightarrow (Q \lor P)$

حق$_{17}$ $(P \land Q) \leftrightarrow (Q \land P)$

حق$_{18}$ $((P \lor Q)\ V\ R) \leftrightarrow (P\ V\ (Q \lor R))$

حق$_{19}$ $((P \land Q) \land R) \leftrightarrow (P \land (Q \land R))$

حق$_{20}$ $P \leftrightarrow (P \lor P)$

حق$_{21}$ $P \leftrightarrow (P \land P)$

حق$_{22}$ $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

حق$_{23}$ $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$

حق$_{24}$ $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \rightarrow \neg Q)$

(5) المبرهنات:

مبرهنة K_1 $L(P \land Q) \rightarrow (LP \land L\,Q)$

البرهان

حق$_{1}$ 1. $(P \land Q) \rightarrow P$

2.	$L((P \wedge Q) \rightarrow P)$	الضرورة ,1
3.	$L(P \rightarrow Q) \rightarrow (LP \rightarrow L\,Q)$	البديهية K
4.	$L((P \wedge Q) \rightarrow P) \rightarrow (L((P \wedge Q) \rightarrow LP)$	استبدال $3, (P \wedge Q/P), (P/Q)$
5.	$L((P \wedge Q) \rightarrow LP$	الوضع 2,4
6.	$(P \wedge Q) \rightarrow Q$	حق$_2$
7.	$L((P \wedge Q) \rightarrow Q)$	الضرورة ,6
8.	$L((P \wedge Q) \rightarrow Q) \rightarrow (L((P \wedge Q) \rightarrow L\,Q)$	استبدال $3, (P \wedge Q/P)$
9.	$L((P \wedge Q) \rightarrow LQ$	الوضع 7,8
10.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R)))$	حق$_3$
11.	$(L(P \wedge Q) \rightarrow LP) \rightarrow ((L((P \wedge Q) \rightarrow L\,Q) \rightarrow (L(P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge L\,Q)))$	استبدال 10، $(L(P \wedge Q)/P), (LP/Q), (LQ/R)$
12.	$(L(P \wedge Q) \rightarrow LQ) \rightarrow (L((P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge LQ))$	الوضع 5,11
13.	$L(P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge LQ)$	الوضع 9,12

$(LP \wedge L\,Q) \rightarrow L(P \wedge Q)$ مبرهنة K_2

البرهان

1.	$Lp \rightarrow L(Q \rightarrow (P \wedge Q))$	حق$_4$، حق$_1$
2.	$L(Q \rightarrow (P \wedge Q)) \rightarrow (LQ \rightarrow L(P \wedge Q))$	البديهية K، استبدال $((P \wedge Q/Q ، Q/P))$
3.	$(Lp \wedge LQ) \rightarrow L(P \wedge Q)$	حق$_8$ 2، 1

$L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge L\,Q)$ مبرهنة K_3

البرهان

1.	$L(p \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge L\,Q)$	مبرهنة K_1
2.	$(LP \wedge L\,Q) \rightarrow L(P \wedge Q)$	مبرهنة K_2
3.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$	حق$_5$
4.	$(L(P \wedge Q) \rightarrow (LP \wedge LQ)) \rightarrow (((LP \wedge LQ)) \rightarrow (L(P \wedge Q) \rightarrow (L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge LQ)))$	استبدال $3,(L(p \wedge Q)/P),(LP \wedge LQ/Q)$

5.	$((LP \wedge LQ) \rightarrow L(P \wedge Q)) \rightarrow (L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge LQ))$	الوضع 1,4
6.	$L(P \wedge Q) \leftrightarrow (LP \wedge L Q)$	الوضع 2,5

المبرهنة K_3 تسمى توزيع الموجه L.

مبرهنة$_1$ قاعدة اشتقاق (قع$_1$) $\alpha \rightarrow \beta \vdash L\alpha \rightarrow L\beta$

البرهان

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	م
2.	$L(\alpha \rightarrow \beta)$	الضرورة ,1
3.	$L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$	استبدال K, (α/P), (β/Q)
4.	$L\alpha \rightarrow L\beta$	الوضع 2,3

مبرهنةK_4 $(LP \vee L Q) \rightarrow L(P \vee Q)$

البرهان

1.	$LP \rightarrow L(P \vee Q)$	قع$_1$، حق$_9$
2.	$LQ \rightarrow L(P \vee Q)$	قع$_1$، حق$_{10}$
3.	$(LP \vee L Q) \rightarrow L(P \vee Q)$	حق$_{11}$ 1,2

مبرهنة$_2$ قاعدة اشتقاق (قع$_2$) $\alpha \leftrightarrow \beta \vdash L\alpha \leftrightarrow L\beta$

البرهان

1.	$\alpha \leftrightarrow \beta$	م
2.	$\alpha \rightarrow \beta$	حق$_{22}$,1
3.	$L\alpha \rightarrow L\beta$	قع$_1$,2
4.	$\beta \rightarrow \alpha$	حق$_{23}$,1
5.	$L\beta \rightarrow L\alpha$	قع$_1$,4
6.	$L\alpha \leftrightarrow L\beta$	حق$_6$ 3,5

قاعدة اشتقاقنا التالية هي إحدى أشكال قاعدة الاستبدال وتنص على أنه: من المبرهنة α التي تحوي الصيغة λ نشتق المبرهنة β التي تختلف عن α باحتوائها على الصيغة δ (في مكان أو أكثر) إذا كانت $\lambda \leftrightarrow \delta$ مبرهنة. بعبارة أخرى إذا

برهنا أن $\lambda \leftrightarrow \delta$ فيمكننا أن نستعيض عن λ بواسطة δ في أي مبرهنة للحصول على مبرهنة أيضاً. سنرمز لهذه القاعدة بواسطة: تك (اختصار لكلمة: تكافؤ).

مبرهنة K_5 $\quad LP \leftrightarrow \neg M \neg P$

البرهان

حق$_{12}$	$P \leftrightarrow \neg\neg P$	1.
استبدال $1,(LP/P)$	$LP \leftrightarrow \neg\neg LP$	2.
استبدال $2, (\neg L \neg P/P)$	$LP \leftrightarrow \neg\neg L \neg\neg P$	3.
تعريف$_4$ $3,$	$LP \leftrightarrow \neg M \neg P$	4.

المبرهنة$_5$ تمكننا من استبدال L بواسطة $\neg M \neg$، كذلك فإن تعريف الموجه M يمكننا من استبدال M بواسطة $\neg L \neg$ وهكذا، وبشكل أكثر عمومية، فإنه في أي تتابع من الموجهين L وM سنقوم باستبدال كل L بواسطة M وكل M بواسطة L، حيث إن الرمز $\neg$ يُدخل أو يحذف مباشرة قبل ومباشرة بعد تتابع الموجهين وعليه مثلاً، نستبدل LM بواسطة $\neg ML \neg$، $\neg LLL$ بواسطة $\neg MMM \neg$، $M\,LLM$ بواسطة $\neg L\,M\,ML \neg$ وهكذا. سنسمي هذه القاعدة: تبادل (L-M).

مبرهنة K_6 $\quad M(P \vee Q) \leftrightarrow (MP \vee MQ)$

البرهان

استبدال $(\neg Q/Q)$, $(\neg P/P)$, مبرهنةK_3	$L(\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (L \neg P \wedge L \neg Q)$	1.
تبادل $1, (L\text{-}M)$	$\neg M \neg(\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow (\neg MP \wedge \neg MQ)$	2.
حق$_{13}$ $2,$	$\neg M(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg MP \wedge \neg MQ)$	3.
حق $3,$	$M(P \vee Q) \leftrightarrow (MP \vee MQ)$	4.

2.1.3 النسق T:

بإضافة بديهية أخرى إلى بديهيات النسق K نحصل على النسق T. البديهية المضافة تحمل الاسم T نفسه.

البديهية T: $LP \rightarrow P$

بإضافة البديهية T يصبح النسق الجديد T أقوى من النسق السابق K، حيث يمكننا برهان مبرهنات أكثر عدداً فيه. ولكن جميع مبرهنات النسق K والتي

برهنا قسماً منها تكون مبرهنات في النسق T أيضاً، حيث أصبح K جزءاً من النسق T. المبرهنة التالية من النسق T لا يمكن برهانها في النسق K.

مبرهنةT_1 $P \rightarrow MP$

البرهان

استبدال $(\neg P/P)$, البديهية T	$L\neg P \rightarrow \neg p$	1.
حق$_{15}$,1	$P \rightarrow \neg L \neg P$	2.
تعريف$_4$,2	$P \rightarrow MP$	3.

3.1.3 النسق **D** (التفسير الأخلاقي):

بإضافة البديهية $LP \rightarrow MP$ إلى بديهيات النسق K نحصل على النسق D. البديهية تنص على أنه إذا كان من الضروري P فإنه من الممكن P (أي ليس من الضروري ألا تكون P). وهكذا، فإن البديهية $LP \rightarrow MP$ تعني أن كل ما هو إلزامي يكون مسموحاً به، وهذا التفسير يسمى تفسيراً أخلاقياً، ولهذا فإن $LP \rightarrow MP$ تسمى بديهية D[(17)] ويسمى النسق الحاصل بإضافتها إلى K بالنسق D.

البديهية D: $LP \rightarrow MP$

مبرهنةD_1 $M(P \rightarrow P)$

البرهان

حق	$P \rightarrow P$	1.
قاعدة الضرورة ,1	$L(P \rightarrow P)$	2.
استبدال $(P \rightarrow P/P)$, البديهيةD	$L(P \rightarrow P) \rightarrow M(P \rightarrow P)$	3.
الوضع 3 ,2	$M(P \rightarrow P)$	4.

4.1.3 النسق **S_4**:

تحتوي بعض الصيغ على تتابع من الموجهات، مثل الصيغة $LP \rightarrow LLP$، تقرأ هذه الصيغة: إذا كان من الضروري P فإنه من الضروري أن يكون من الضروري P.

إن مكونات النسق S 4 هي مكونات النسق T نفسها بإضافة البديهية الوحيدة التالية: البديهية4: $LP \rightarrow L\,LP$

17- deontic.

سنبرهن لاحقاً في هذا الفصل أن هذه البديهية صحيحة في S_4 وليست صحيحة في كل من T وK.

مبرهنة (1) S_4 $MMP \to MP$

البرهان

1. $L\neg P \to LL\neg P$ استبدال $(\neg P/P)$, البديهية4
2. $\neg MP \to \neg M\,MP$ تبادل (L-M) ,1
3. $MMP \to MP$ حق$_{15}$,2

مبرهنة (2) S_4 $LP \leftrightarrow L\,LP$

البرهان

1. $LPP \to LP$ استبدال (LP/P), البديهيةT
2. $LP \leftrightarrow L\,LP$ حق$_5$، البديهية 1,4

مبرهنة (3) S_4 $MP \leftrightarrow M\,MP$

البرهان

1. $MP \to M\,MP$ استبدال (MP/P), مبرهنةT_1
2. $MP \leftrightarrow M\,MP$ حق$_5$، مبرهنة $S_4(1)$,1

مبرهنة (4) S_4 $MLMP \to MP$

البرهان

1. $LMP \to MP$ استبدال (MP/P), البديهيةT
2. $MLMP \to MMP$ قع$_3$,1
3. $MLMP \to MP$ حق$_5$، مبرهنة $S\,4(1)$,2

مبرهنة (5) S_4 $LMP \to LMLMP$

البرهان

1. $LMP \to MLMP$ استبدال (LMP/P), مبرهنةT_1
2. $LLMP \to LMLMP$ قع$_1$,1

3.	$LMP \rightarrow LMLMP$	مبرهنة تك،(2)4 S ,2
	$LMP \leftrightarrow LMLMP$	مبرهنة (6) S_4

البرهان

1.	$LMLMP \rightarrow LMP$	قع$_1$,مبرهنة (4)4 S
2.	$LMP \leftrightarrow LMLMP$	حق$_5$,مبرهنة (5)4 S ,1

5.1.3 النسق S_5:

أسس هذا النسق هي أسس النسق T نفسها مع إضافة البديهية التالية:

البديهية E: $MP \rightarrow LMP$

سنبرهن لاحقاً في هذا الفصل أن هذه البديهية صحيحة في S_5 وخاطئة في كل من K وT وS_4.

المبرهنات الثلاثة الأولى للنسق S_5 يتم برهانها بطريقة مبرهنات $S_4(1)$ إلى $S_4(3)$ نفسها، ولكن باستخدام E عوضاً عن البديهية 4. هذه المبرهنات:

$S_5(1)$: $MLP \rightarrow LP$

$S_5(2)$: $MP \leftrightarrow LMP$

$S_5(3)$: $LP \leftrightarrow MLP$

بديهية النسق S4 وهي $LP \rightarrow LLP$ ليست من بديهيات نسقنا هذا S_5، وسنقوم ببرهانها الآن كمبرهنة للنسق S_5.

	$LP \rightarrow LLP$	مبرهنة(4) S_5

البرهان

1.	$LP \rightarrow MLP$	استبدال (LP/P) ,مبرهنةT_1
2.	$MLP \leftrightarrow LMLP$	استبدال (LP/P) ,مبرهنة$S_5(2)$
3.	$LP \rightarrow LMLP$	تك (LMLP/MLP) 1,2
4.	$LP \rightarrow LLP$	مبرهنة تك،$S_5(3)$,3

	$L(P \vee LQ) \leftrightarrow (LP \vee LQ)$	مبرهنة (5) S_5

البرهان

1.	$L(P \vee LQ) \rightarrow (LP \vee MLQ)$	استبدال (LQ/Q) ,مبرهنةK_9

2.	$L(P \vee LQ) \rightarrow (LP \vee LQ)$	مبرهنة(3) S 5 ,1
3.	$(LP \vee LLQ) \rightarrow L(P \vee LQ)$	استبدال (LQ/Q), مبرهنةK_4
4.	$(LP \vee LQ) \rightarrow L(P \vee LQ)$	مبرهنة تك،(2) S 4 ,3
5.	$L(P \vee LQ) \leftrightarrow (LP \vee LQ)$	حق$_5$ 2,4

(6) مبرهنة S5 $L(P \vee MQ) \leftrightarrow (LP \vee MQ)$

البرهان

1.	$L(P \vee LMQ) \rightarrow (LP \vee LMQ)$	مبرهنة S 5(5) (MQ/Q), استبدال
2.	$L(P \vee MQ) \leftrightarrow (LP \vee MQ)$	مبرهنة تك،(2) S 5 ,1

6.1.3 النسق B:

أسس هذا النسق هي أسس T نفسها مع إضافة البديهية أدناه.

البديهية B[18]: $P \rightarrow LMP$

سنبرهن لاحقاً في هذا الفصل أن هذه البديهية خاطئة في K وكذلك في T.

سنبرهن الآن، قاعدة اشتقاق النسق B التالية:

قع$_4$ $M\alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow L\beta$

البرهان

1.	$M\alpha \rightarrow \beta$	م
2.	$LM\alpha \rightarrow L\beta$	قع$_1$,1
3.	$\alpha \rightarrow LM\alpha$	البديهية B (α/P)
4.	$\alpha \rightarrow L\beta$	حق$_6$,2 ,3

الصيغة $P \rightarrow LMP$ هي الصيغة التي تميز النسق B عن T وعن S4. تنسب هذه البديهية إلى الرياضي الألماني بروور مؤسس المدرسة الحدسية في الرياضيات. ولكن، لماذا أصبحت الصيغة B تمثل الحدسية؟ الجواب هو التالي:

عند الحدسيين، الصيغة $P \rightarrow ⌉⌉P$ صادقة، ولكن $⌉⌉P \rightarrow P$ كاذبة. من أجل أن يبدو هذا معقولاً تم اعتبار -في حساب القضايا الحدسي- النفي ⌉ على أنه يعني (ليس من الممكن أن)، أي يعني ما نعنيه عادة: ⌉L. الآن إذا عوضنا عن ⌉

18- brouwerian axiom.

بواسطة ⌉L فإن P → P⌉⌉ تصبح P → P⌉L⌉L أو P → LMP و P⌉⌉ → P تصبح LMP → P أو B.

2.3 أشجار صدق الأنساق العادية:

لقد برهنا في الفصل الأول صحة الصيغ:

$$LP \to P ،LP \to MP ، LP \to LLP ، MP \to LMP$$

واستخدمنا (نماذج كريبكة) كطريقة لبرهان هذه الصحة في إطارات تمتلك فيها علاقة الموصولية R خواص معينة.

سنبرهن في هذه الفقرة، وباستخدام أشجار الصدق أن الأنساق العادية T، D، S4، S5، B، هي توسيعات للنسق العادي والأساسي K، وذلك عن طريق إعطاء خواص متعددة إلى العلاقة R في K كالتالي:

(1) النسق T، والذي بديهيته $LP \to P$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية. وهكذا يكون T توسيعاً إلى K.

(2) النسق D هو الذي بديهيته $LP \to MP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K متسلسلة. وهكذا يكون D توسيعاً إلى K.

(3) النسق S_4 الذي بديهيته $LP \to LLP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية ومتعدية. وهكذا يكون S_4 توسيعاً إلى K وكذلك إلى T.

(4) النسق S_5 الذي بديهيته $MP \to LMP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية، ومتماثلة ومتعدية. وهكذا يكون S_5 توسيعاً إلى كل من K، T، S_4.

(5) النسق B الذي بديهيته $P \to LMP$ تكون صحيحة عندما تكون علاقة الموصولية R في K انعكاسية ومتماثلة. وهكذا يكون B توسيعاً إلى K وإلى T.

إن تبيان أن كل الأنساق العادية لقضايا الجهة: T، D، S_4، S_5، B هي توسيع للنسق الأساسي K يقوم على ما يلي:

بما أن بديهية K: $L(P \to Q) \to (LP \to LQ)$ صحيحة في كل النماذج من دون أي قيود على R، فإن البديهية K صحيحة في جميع النماذج التي لا يوجد فيها أي تقييد

على R، وبالتالي فإن كل الصيغ التي تكون صحيحة في النسق K تكون صحيحة أيضاً في كل النماذج التي لا توجد فيها أي قيود على R وإذاً، تكون صحيحة في الأنساق: T، D، S_4، S_5، B. بهذا المعنى، تكون هذه الأنساق الأخيرة توسيعاً إلى K.

ولقد كنا قد عرَّفنا خواص العلاقة R، والتي سنعطيها رموزاً كالتالي:

الانعكاسية:ρ ، وتقرأ روه - التماثل:σ ، وتقرأ سيكما - التعدي:τ ، ويقرأ تاو - التسلسل: η، ويقرأ إيتا. ويمكن تركيب هذه الخواص.

يمكننا الآن، كتابة الأنساق العادية T، D، S_4، S_5، B كتوسيعات للنسق الأساسي العادي K كالتالي T: $K\rho$ ويقرأ K روه،D : $K\eta$ ويقرأ K إيتا، S_4: $K\rho\tau$ ويقرأ K روه تاو، S_5: $K\rho\sigma\tau$ ويقرأ K روه سيكما تاو، B: $K\rho\sigma$ ويقرأ K روه سيكما، على الترتيب[19].

أولاً: سنبرهن أن الصيغة $(L\,(P \rightarrow L\,Q) \rightarrow (LP \rightarrow LQ)$، التي هي بديهية النسق الأساسي K، صحيحة في جميع الإطارات، بغض النظر عن خواص العلاقة R:

1	$\neg(L\,(P \rightarrow Q) \rightarrow (LP \rightarrow LQ)),0$
2	$L\,(LP \rightarrow Q),0$
3	$\neg(LP \rightarrow LQ),0$
4	$LP,0$
5	$\neg LQ,0$
6	$M\neg Q,0$
7	$0R1$
8	$\neg Q,1$
9	$P,1$
10	$P \rightarrow Q,1$
11	$\neg P, 1$ $Q, 1$
12	x x

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخطان 4 و5 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 6 اشتق من 5 بتطبيق القاعدة $\neg L$. الخطان 7 و8 اشتقا من 6 بتطبيق القاعدة M. الخط 9 اشتق من 4 بتطبيق القاعدة L. الخط 10 اشتق من 2 بتطبيق القاعدة L. الخط 11 اشتق من 10 بتطبيق القاعدة $\rightarrow$. الشجرة مغلقة لوجود $\neg P, 1$ و$P, 1$ على الفرع الأيسر ولوجود $Q, 1$ و$\neg Q, 1$ على الأيمن. والصيغة صحيحة. (لاحظ، أننا لم نستخدم أي خاصية للعلاقة الثنائية R).

19- ρ : rho, σ : sigma, τ : tau, η : eta.

ثانياً: سنبرهن صحة الصيغة $LP \rightarrow P$ في النسق T.

$2. \vdash_T LP \rightarrow P$

1	$\neg(LP \rightarrow P),0$
2	0R0
3	LP,0
4	$\neg P,0$
5	P,0
6	x

الخطان 3 و 4 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 5 اشتق من 3 و 0R0 على الخط 2، أي توافر الخاصية الانعكاسية للعلاقة R في النسق T، والتي من دونها كنا سنقف عند الخط 4 ولا نشتق P وتبقى الشجرة مفتوحة وتكون الصيغة غير صحيحة في T. الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة في النسق T. إن هذا يبرهن أن T هو توسيع للنسق K وأن الصيغة $LP\rightarrow P$ هي صيغة حاسمة للتفريق بين النسقين K و T.

ثالثا: سنبرهن الآن صحة الصيغة $LP \rightarrow LLP$ في النسق S_4.

$3. \vdash_{S_4} LP \rightarrow LLP$

1	$\neg(LP \rightarrow LLP),0$
2	LP,0
3	$\neg LLP,0$
4	$M\neg LP,0$
5	0R1
6	$\neg LP,1$
7	$M\neg P,1$
8	1R2
9	$\neg P,2$
10	0R2
11	P,2
12	x

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة $\neg L$. الخطان 5 و 6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخط 7 اشتق من 6 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة. الخطان 8 و 9 اشتقا من 7 بتطبيق قاعدة الإمكانية. كان يجب أن نتوقف عند الخط 9 لو كنا في النسق K أو النسق T وتبقى الشجرة مفتوحة والصيغة خاطئة في هذين النسقين،

ولكننا أضفنا 1R2 على الخط 8 بسبب قاعدة الإمكانية وعندنا 0R1 فإذاً يصبح لدينا 0R2، وذلك باستخدام خاصية التعدي للعلاقة R في النسق S_4. وبما أن LP صحيحة في العالم 0، فإنه بتطبيق قاعدة الضرورة على الخطين 2 و10، نشتق الخط 11 وتغلق الشجرة لوجود P,2 و$\neg$P,2 . مما ذكر أعلاه يتبين أن النسق S_4 هو توسيع لكل من النسقين K وT.

رابعاً: سنبرهن أدناه صحة الصيغة $MP \rightarrow LP$ في النسق D.

$4. \vdash_D LP \rightarrow MP$

1	$\neg(LP \rightarrow MP),0$
2	LP,0
3	$\neg$MP,0
4	L$\neg$P,0
5	0R1
6	P,1
7	$\neg$P,1
8	x

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الإمكانية $\neg$M . الخط 6 اشتق من 2 و5 بتطبيق قاعدة الضرورة. والخط 7 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة الضرورة. الشجرة مغلقة لوجود P,1 و $\neg$P,1 والصيغة صحيحة في D. ولقد استخدمنا في البرهان خاصية التسلسل للعلاقة R في النسق D على الخط 5، وبما أن هذه الصيغة لا تكون صحيحة إلا باستخدام خاصية التسلسل، فإن D هو توسيع للنسق K.

خامساً: سنبرهن الآن أن الصيغة $MP \rightarrow LMP$ صحيحة في النسق S_5.

قبل أن نبدأ بالبرهان، نشير إلى أن علاقة الموصولية R في النسق S_5 تمتلك خواص: الانعكاسية والتماثل والتعدي. وهكذا فهي علاقة تكافؤ، ولتوضيح علاقة التكافؤ نعطي المثال التالي من الحياة اليومية: إن علاقة (... مساو بالطول إلى...) هي علاقة تكافؤ، وهذه العلاقة تبين أنه عندما تعرَّف علاقة التكافؤ على مجموعة من الأشياء، فإنها تجزّء هذه الأشياء إلى عدد من (أصناف التكافؤ). وهكذا، إذا عرّفنا (... مساو بالطول إلى...) على مجموعة من البشر، فإنه من أجل كل طول يمتلكه أي من هؤلاء البشر، سيوجد (صنف تكافؤ) يتكون فقط من

جميع الذين يمتلكون ذلك الطول. إن العلاقة (... مساو بالطول إلى...) هـي علاقـة تكـافؤ لأنها:

1) انعكاسية: ذلك أن كل فرد مساو بالطول إلى نفسه، أي أن x مـساو بـالطول إلى x، أو أن xRx لكل x من مجموعة البشر.

2) تماثلية: ذلك أنه إذا كان أي فرد مساو بالطول إلى أي فرد آخر، فإن هـذا الآخـر مساو بالطول إلى الأول، أي أنه إذا كان x مساو بالطول إلى y فإن y مـساو بـالطول إلى x، أو إذا كان xRy فإن yRx، لكل y, x من الصنف.

3) متعدية: ذلك أنه إذا كان أي فرد مساو بالطول إلى أي فرد آخر وكان هذا الآخر مساو بالطول إلى ثالـث، فـإن الأول مـساو بـالطول إلى الثالـث، أي أنـه إذا كـان x مـساو بالطول إلى y وy مساو بالطول إلى z فإن x مساو بالطول إلى z، لكل x، y، z من الصنف.

وبالعودة إلى مثالنا، سيوجد صنف يتكون من كـل الـذين طـولهم 1.50م، وصـنف آخر من كل الذين طولهم 1.60م، وهكذا...، وبالتالي، فإن كل فرد سـيمتلك هـذه العلاقـة مع أي فرد آخر داخل كل صنف، ولكن، لن يوجد أحد يمتلك العلاقة نفسها مع فـرد آخـر من صنف آخر.

إذا كانت العلاقة R في إطارات كريبكة (W,R) هي علاقة تكافؤ فهـذا سـيؤدي إلى أن تجزئ العلاقة R مجموعة العوالم W إلى أصناف تكافؤ، حيث كل عالم w يكون مرتبطاً بالعلاقة R مع (موصول من) أي عالم داخل صنفه وليس مرتبطاً مـع أي عـالم مـن صـنف آخر. وهكذا، يصبح بإمكاننا النظر إلى الإطار، الذي تكون فيه العلاقة R علاقة تكافؤ عـلى أنه مجموعة من عدة إطارات منفصلة عن بعـضها الـبعض، بحيـث إنـه داخـل كـل منهـا يكون أي عالم موصولاً من أي عالم آخر.

وهكذا، فعند تقويم صيغة في نموذج مؤسس على إطارات مـن هـذا النـوع، نقـوم باستبدال القاعدة [VL] بواسطة قاعدة أبسط كما يلي:

$[VLS_5]$ $V(L\alpha, w) = 1$

إذا كان $V(\alpha, w') = 1$ من أجل كل $w' \in W$، وإلا فإن $V(L\alpha, w) = 0$.

يمكننا الآن، إنشاء شجرة صدق S5 أو Kρστ ببساطة كالتالي: لا يتم ذكر العلاقة R في الشجرة وتطبق القاعدتين L وM فقط.

$5. \vdash_{S_5} MP \rightarrow LMP$

1	$\urcorner(MP \rightarrow LMP),0$
2	$MP,0$
3	$\urcorner LMP,0$
4	$M\urcorner MP,0$
5	$P,1$
6	$\urcorner MP,2$
7	$L\urcorner P,2$
8	$\urcorner P,0$
9	$\urcorner P,1$
10	x

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\urcorner \rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة. الخط 5 اشتق من 2 بتطبيق قاعدة الإمكانية. الخط 6 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية. الخط 7 اشتق من 6 بتطبيق قاعدة نفي الإمكانية. الخط 8 اشتق من 7 بتطبيق قاعدة الضرورة. الخط 9 اشتق من 7 بتطبيق قاعدة الضرورة. الشجرة مغلقة لوجود P,1 و $\urcorner$P,1 والصيغة صحيحة في S_5.

إن هذه الصيغة خاطئة في كل من K، T، S_4، لأن علاقة الموصولية R يجب أن تكون علاقة تكافؤ حتى تكون صحيحة، وهذه الخاصية متوافرة فقط في S_5.

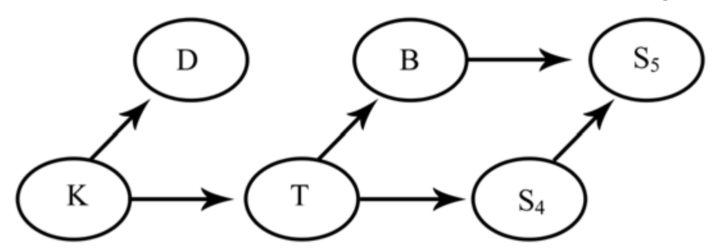
سادساً: سنبرهن أن الصيغة P → LMP صحيحة في النسق B.

$6. \vdash_{B} P \rightarrow LMP$

1	$\urcorner(P \rightarrow LMP),0$
2	$P,0$
3	$\urcorner LMP,0$
4	$M\urcorner MP,0$
5	0R1
6	$\urcorner MP,1$
7	1R0
8	$L\urcorner P,1$
9	$\urcorner P,0$
10	x

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة $\neg L$. الخط 5 و6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة M. الخط 8 اشتق من 6 بتطبيق القاعدة $\neg M$. الخط 9 اشتق من 8 بتطبيق قاعدة L. الشجرة مغلة لوجود P,0 و $\neg$P,0 عليها والصيغة صحيحة. لاحظ أن الخط 9 اشتق من $\neg$P,1 L لأن 1R0، أي أننا استخدمنا كون R تماثلية للحصول على 1R0، وبالتالي فإن $LMP \rightarrow P$ ليست صحيحة إلا في الإطارات التماثلية، وبهذا فهي ليست صحيحة في K أو أن B توسيعا أصليا إلى K.

المخطط التالي يبين التوسيعات، الذي تحدثنا عنها، حيث السهم يعني (متضمن في) إذا كانت جميع الصيغ الصحيحة لنسق متضمنة (مجموعة جزئية) في الصيغ الصحيحة لنسق آخر.



3.3 تمارين:

(أ) برهن أن كل صيغة من الصيغ التالية صحيحة:

1- مبرهنة K7 $M(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (LP \rightarrow MQ)$

2- مبرهنة K8 $M(P \wedge Q) \rightarrow (MP \wedge MQ)$

3- مبرهنة K9 $L(P \vee Q) \rightarrow (LP \vee MQ)$

4- برهن المبرهنة T_2: $M(P \rightarrow LP)$

5- برهن المبرهنة (6) S_4: $LMP \leftrightarrow LM\,LMP$

7- برهن المبرهنة (7) S_5: $M(P \wedge MQ) \leftrightarrow (MP \wedge MQ)$

8- برهن المبرهنة (8) S_5: $M(P \wedge LQ) \leftrightarrow (MP \wedge LQ)$

الفصل الرابع

الاستلزام الدقيق ومضادات الواقع

Strict implication and Counterfactuals

1.4 الاستلزام الدقيق:

1.1.4 مفارقات الاستلزام المادي:

لقد درسنا في المنطق التقليدي الاستلزام المادي الذي رمزنا له بواسطة $\rightarrow$ لترجمة الرابط باللغة العربية (إذا كان... فإن...) إلى اللغة الرمزية لحساب القضايا. وهكذا عالجنا الصيغة $\alpha \rightarrow \beta$ باستخدام دوال الصدق، وحيث إنها صادقة عندما يكون مقدمها α كاذبا أو تاليها β صادقا. ولكن هذه المعالجة تؤدي إلى ما يسمى مفارقات الاستلزام المادي[20]، مثل:

1. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
2. $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

المفارقة الأولى تنص: إذا كانت قضية صادقة، فإن أي قضية أخرى تستلزمها.

المفارقة الثانية تنص: إذا كانت القضية كاذبة، فإنها تستلزم أي قضية أخرى.

المثالان التاليان يناقشان المفارقتين الأولى والثانية.

مثال **1:**

عاش أفلاطون حتى سن الرجولة.

إذاً، إذا كان أفلاطون مات طفلاً، فإنه عاش حتى سن الرجولة.

20- paradoxes material.

هذه الحجة صحيحة بالنسبة إلى الاستلزام المادي. ولكن مقدمة هذه الحجة صادقة والنتيجة كاذبة في العالم الواقعي.

مثال **2**:

لم يمت أفلاطون وهو طفل.

إذاً، إذا كان أفلاطون مات وهو طفل، فإنه عاش حتى سن الرجولة.

ما قلناه على الحجة في المثال 1 ينطبق على الحجة في المثال 2 أيضاً.

لقد أدى هذا بالعالم الأمريكي ك. لويس، منذ بداية 1912 للتمييز بين الاستلزام الصادق مادياً والصادق ضرورياً أو بدقة[21]. لقد استخدم لويس رمزاً مشابهاً إلى الرمز ➤ للتعبير عن الاستلزام الدقيق. وهكذا، فإن P ➤ Q يعني عنده أنه من المستحيل أن تكون P صادقة من دون أن تكون Q صادقة أيضاً. وللتعبير عن أنه من المستحيل أن تكون P صادقة من دون أن تكون Q صادقة أيضاً، نقول:

من الضروري إذا كانت P صادقة فإن Q تكون صادقة أيضاً، ورمزياً نكتب:

.$L(P \to Q)$

يمكننا إعطاء التعريف التالي:

$$\alpha \blacktriangleright \beta \equiv_{\text{تع}} L(\alpha \to \beta)$$

أو أن نعرف ➤ بواسطة M كالتالي:

$$\alpha \blacktriangleright \beta \equiv_{\text{تع}} \neg M \neg(\alpha \to \beta)$$

أو أن

$$\alpha \blacktriangleright \beta \equiv_{\text{تع}} \neg M (\alpha \wedge \neg \beta)$$

عندما تستلزم بدقة صيغتان كل منهما الأخرى، فإننا نقول، إن كلاً منهما تستلزم ثنائياً بدقة الأخرى. ونستطيع إعطاء التعريف التالي:

$$\alpha \blacktriangleleft\blacktriangleright \beta \equiv_{\text{تع}} (\alpha \blacktriangleright \beta) \wedge (\beta \blacktriangleright \alpha)$$

باستخدام العوالم الممكنة، نستطيع كتابة تعريف صدق الاستلزام الدقيق في نموذج كريبكة كالتالي:

1. $V(\alpha \blacktriangleright \beta, w) = 1$

21- strictly.

إذا وفقط إذا كان مـن أجـل جميـع العـوالم u حيـث wRu، $V(\beta, u) = 1$ و $V(\alpha, u) = 1$.

2. $V(\alpha \succ \beta, w) = 0$

إذا وفقط إذا وجد عالم u حيث wRu، $V(\beta, u) = 0$ و$V(\alpha, u) = 1$.

وبـالعودة إلى المفارقـة الأولى $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$، فإنـه باسـتخدام $\succ$ عوضـاً عـن $\rightarrow$، نحصل على نتيجة معقولة، وهي أن كلاً من الحجتين أعلاه خاطئة. وقبـل أن نـبرهن أن الحجة الأولى:

P

إذاً $P \succ Q$

خاطئة ولتسهيل مناقشة الحجة نضع P: عاش أفلاطون حتى سن الرجولة.

Q: مات أفلاطون طفل.

وأفلاطون، طبعاً عاش حتى سن الرجولة وكان من الممكن أن يموت طفلاً ولا ينمـو حتى يصبح رجلاً.

ومن أجل إعطاء مثال مضاد، فمن الواضـح أننـا نحتـاج إلى عـالمين: الأول w_1 يمثـل العالم الواقعي، الذي عاش فيه أفلاطون حتى سن الرجولة. الثاني w_2 العالم الممكـن، الـذي مات فيه أفلاطون طفلاً.

مبرهنة 1:

صورة الحجة:

المقدمات: P

النتيجة: $P \succ Q$

خاطئة في نموذج الاستلزام الدقيق.

البرهان:

سنبرهن خطأ صورة الحجة، وذلك بإعطاء مثال مضاد.

لتكن مجموعة العوالم الممكنة:

$$W = \{w_1, w_2\}$$

وعلاقة الموصولية:

$$R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2)\}$$

أما دالة التقويم V فهي:

$$V(Q, w_1) = 0,\ V(P, w_1) = 1$$

$$V(Q, w_2) = 1,\ V(P, w_2) = 0$$

بما أن w_1Rw_2، $V(P, w_2) = 0$ و $V(Q, w_2) = 1$ أصبح لدينا:

$V(Q \blacktriangleright P, w_1) = 0$. وبما أن $V(P, w_1) = 1$ فـإذاً، صـورة الحجـة خاطئـة، لأن مقدمتها P في w_1 صادقة بينما $Q \blacktriangleright P$ كاذبة في w_1.

بالعودة إلى المفارقة الثانية التي صورة حجتها الصحيحة:

$\urcorner Q$

إذاً $Q \rightarrow P$

نستطيع الآن برهان أن صورة الحجة بالاستلزام الدقيق:

$\urcorner Q$

إذاً $Q \blacktriangleright P$

خاطئة، وذلك بأخذ المثال المضاد أعلاه نفسه، ففي العالم الواقعي لم يمت أفلاطـون طفلاً، وهذا يجعل $\urcorner Q$ صادقة، لكن بما أنه من الممكن (بالنسبة للعالم الواقعي) أنه مات طفلاً ولم ينمُ أبداً حتى سن الرجولة فإن $Q \blacktriangleright P$ كاذبة.

2.1.4 أشجار صدق الاستلزام الدقيق:

يمكننا دراسة دلالة الاستلزام الدقيق بواسطة أشجار الصدق، وهـذا مـا سـنفعله في هذه الفقرة.

نحن، هنا، لا نحتاج إلى قواعد اشتقاق جديدة، لأنه يمكننا الاستعاضة عـن رابطـي: الاستلزام الدقيق والاستلزام الثنائي الدقيق بواسطة تعريفيهما:

$$\alpha \blacktriangleright \beta \equiv \text{تع}\ L(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$\alpha \blacktriangleleft\blacktriangleright \beta \equiv \text{تع}\ L(\alpha \leftrightarrow \beta)$$

وهكذا فإذا كانت الصيغة $\alpha \blacktriangleright \beta$ صادقة، فإننـا نـستنتج أن $\alpha \rightarrow \beta$ صـادقة.

وهكذا، فإن قاعدة الاشتقاق $\blacktriangleright$ هي قاعدة الاشتقاق نفسها $\rightarrow$ التي مرت بنا.

1. قاعدة الاستلزام الدقيق $\blacktriangleright$

$\alpha \blacktriangleright \beta \quad w$

wRt

$\urcorner\alpha\ t \qquad \beta\ t$

حيث t أي عالم.

هذه القاعدة تسمح لنا ببرهان أنه من الاستلزام الدقيق ينتج الاستلزام المادي.

مثال **1**:

$$P \succ Q \vdash P \rightarrow Q$$

1	$P \succ Q, 0$
2	$0R1$
3	$\neg (P \rightarrow Q), 0$
4	$P, 0$
5	$\neg Q, 0$
6	$\neg P, 0$ $Q, 0$
7	x x

الخطان (الصيغتان) 4 و 5 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 6 اشتق من 1 بتطبيق القاعدة $\succ$.

2. قاعدة نفي الاستلزام الدقيق $\neg\succ$

$$\neg(\alpha \succ \beta), w$$

$$wRt$$

$$\alpha, t$$

$$\neg\beta, t$$

حيث t يجب أن يكون عالماً جديداً.

مثال **2**:

سنبرهن أن الصيغة $(P \wedge Q) \succ Q$ صحيحة.

1	$\neg((P \wedge Q) \succ Q)), 0$
2	$0R1$
3	$(P \wedge Q), 1$
4	$\neg Q, 1$
5	$P, 1$
6	$Q, 1$
7	x

الخطان 3 و 4 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة $\succ\neg$. الخطان 5 و 6 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\wedge$. الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

سنأتي الآن على قاعدة اشتقاق الاستلزام الثنائي. فإذا كان $\beta \blacktriangleleft \alpha$ صادقة فإن $\alpha \leftrightarrow \beta$ تكون صادقة أيضاً. وهكذا، فإن قاعدة الاستلزام الثنائي الدقيق تماثل قاعدة الاستلزام الثنائي.

3. قاعدة الاستلزام الثنائي الدقيق ❮❯

$\alpha \blacktriangleright \beta \quad w$
wRt
$\neg\alpha\ t \qquad \beta\ t$

حيث t أي عالم.

باستخدام هذه القاعدة، يمكننا برهان أن الاشتقاق التالي صحيح:

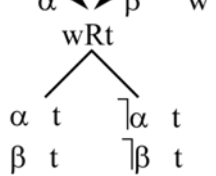
مثال 3:

1	$P ❮❯ Q, 0$			
2	$0R1$			
3	$\neg(P \leftrightarrow Q),0$			
4	$P,0$		$\neg P,0$	
5	$\neg Q,0$		$Q,0$	
6	$P,0$	$\neg P,0$	$P,0$	$\neg P,0$
7	$Q,0$	$\neg Q,0$	$Q,0$	$\neg Q,0$
8	x	x	x	x

الخطان (الصيغتان) 4 و 5 اشتقا من 3 بتطبيق قاعدة $\neg\leftrightarrow$. الخطان 6 و 7 اشتقا من 1 بتطبيق قاعدة ❮❯. فالشجرة مغلقة والاشتقاق صحيح.

إذا ظهرت صيغة الاستلزام الثنائي الدقيق منفية، فإننا نفترض أنها كاذبة. ونعلم أن $\alpha ❮❯ \beta$ تكون كاذبة فقط، إذا كانت α وβ مختلفتين في قيم الصدق في عالم ممكن. إذاً يوجد عالم تكون فيه α صادقة وβ كاذبة، أو β صادقة وα كاذبة. الآن نستطيع إعطاء القاعدة التالية:

4. قاعدة نفي الاستلزام الثنائي الدقيق ❮❯¬



حيث t يجب أن يكون عالم جديد.

مثال **4**:

الصيغة $(\neg P \rightarrow Q) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (P \vee Q)$ صحيحة.

1	$\neg((P \vee Q) \blacktriangleleft\!\blacktriangleright (\neg P \rightarrow Q)),0$			
2	$0R1$			
3	$(P \vee Q),1$		$\neg(P \vee Q),1$	
4	$\neg(\neg P \rightarrow Q),1$		$(\neg P \rightarrow Q),1$	
5	$\neg P,1$		$\neg P,1$	
6	$\neg Q,1$		$\neg Q,1$	
7	$P,1$	$Q,1$	$\neg\neg P,1$	$Q,1$
8	x	x	P	x
9			x	

الخطـان 3 و 4 اشـتقا مـن 1 بتطبيـق القاعـدة $\neg\blacktriangleleft\!\blacktriangleright$. بالنـسبة للفـرع الأيـسر: الخطان 5 و6 اشتقا من 4 بتطبيق قاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 7 اشتق من 3 بتطبيق القاعدة $\vee$. بالنسبة للفرع الأيمن: الخطان 5 و6 اشتقا من 3 بتطبيق القاعدة $\neg\vee$. الخط 7 اشتق مـن 4 بتطبيـق القاعـدة $\rightarrow$. الخـط 8 اشـتق مـن 7 بتطبيـق القاعـدة $\neg\neg$. الـشجرة مغلقـة والصيغة صحيحة.

3.1.4 نسق الاستلزام الدقيق:

إن مبرهنات نسق الاستلزام الدقيق هي استمرار لمبرهنات النسق K، التي مرت بنا ولذلك سنستمر بالترقيم نفسه.

مبرهنة K_{10} $\quad (\neg P \blacktriangleright P) \leftrightarrow LP$

البرهان

1.	$(\neg P\ 0\!\rightarrow P) \leftrightarrow P$	حق
2.	$L(\neg P \rightarrow P) \leftrightarrow LP$	قع$_2$, 1
3.	$(\neg P \blacktriangleright P) \leftrightarrow LP$	تعريف $\blacktriangleright$, 2

	$(P \blacktriangleright \neg P) \leftrightarrow L\neg P$	مبرهنة K_{11}
1.	$(P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P$	حق
2.	$L(P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow L\neg P$	قع$_2$,1
3.	$(P \blacktriangleright \neg P) \leftrightarrow L\neg P$	تعريف $\blacktriangleright$,2

	$((Q \blacktriangleright P) \wedge (\neg Q \blacktriangleright P)) \leftrightarrow LP$	مبرهنة K_{12}
1.	$((Q \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow \neg P) \leftrightarrow P$	حق
2.	$L((Q \rightarrow P) \wedge (Q \rightarrow \neg p)) \rightarrow LP$	قع$_2$ 1،
3.	$(L(Q \rightarrow P) \wedge L(\neg Q \rightarrow P)) \leftrightarrow LP$	2, مبرهنة K_3, $(Q \rightarrow P/P)$ استبدال $(\neg Q \rightarrow P/Q)$
4.	$((Q \blacktriangleright P) \wedge (\neg Q \blacktriangleright P)) \leftrightarrow LP$	تعريف $\blacktriangleright$,3

$((P \blacktriangleright Q) \wedge (P \blacktriangleright \neg Q)) \leftrightarrow L\neg P$	مبرهنة K_{13}

البرهان يشابه برهان المبرهنة K_{10}.

المبرهنات K_{10} - K_{13} تعكس حقائق مهمة. فالمبرهنة K_{10} تنص على أن القضية الضرورية تكون مستلزمة بدقة من قبل نفيها. أما K_{11} تنص على أن القضية المستحيلة هي القضية التي تستلزم بدقة نفيها. المبرهنة K_{12} تنص على أن القضية الضرورية هي القضية التي تكون مستلزمة بدقة بواسطة قضية أخرى وبواسطة نفي تلك القضية الأخرى. المبرهنة K_{13} تنص على أن القضية المستحيلة هي القضية التي تستلزم بدقة قضية أخرى وتستلزم بدقة نفي القضية الأخرى.

2.4 مضادات الواقع:

لقد كان منطق القضايا الشرطية (الاستلزامات) حافزاً رئيساً لتطوير منطق الجهة. ولقد قمنا بدراسة الاستلزام المادي الذي يمثل دالة صدق والاستلزام الدقيق الذي لا يمثل دالة صدق، وكلاهما يعجزان عن تفسير صنف معين من الاستلزامات، التي تسمى استلزامات مضادات الواقع، أو اختصاراً تسمى مضادات

الواقع، وذلك لأن المقدم فيها كـاذب، أي لا يتوافـق مـع الواقـع. يمكـن كتابـة مـضادات الواقع على الشكل (لو أن α لكانت β) أو على الـشكل: إذا كانـت α فـإن β، وليحمـل معنى الشكل الأول نفسه وسنتبنى الـشكل الأخـير. وبمـا أن، المقـدم هنـا يتـضمن معنـى التمني، فلذلك تسمى مضادات الواقع أيضاً، استلزامات التمني[22].

أمثلة:

(1) لو أن الرسام فان كوخ عاش حتى سن 70 عاماً، لكان قد رسم ضعف ما أنتجه.

أو:

إذا كان الرسام فان كوخ عاش حتى سن 70 عاماً، فإنه قد رسم ضعف ما أنتجه.

(2) لو أن الغلاف الجوي خالياً من الأوكسجين، لكانت الحياة مستحيلة.

أو:

إذا كان الغلاف الجوي خالياً من الأوكسجين، فإن الحياة مستحيلة.

(3) لو كان لدي زورق لذهبت حول العالم. (ولكن ليس لدي زورق).

(4) لو كنت رئيساً للوزراء الآن لحسّنت بلدي. (ولكني لست رئيساً للوزراء).

(5) لو تكلم الأستاذ ببطء أكثر الآن لفهمنا. (ولكنه لا يتكلم ببطء).

لا يمثل الاستلزام المادي والاستلزام الدقيق، بناءً منطقيـاً للقـضيتين أعـلاه، فحـسب جدول صدق الأول، فإن الاستلزام يكون صادقاً إذا كان المقدم كاذباً. وهكذا، وبما أن مقدم مضادات الواقع يكون كاذباً، فإنها تكون صادقة. ولكننا نستطيع رؤية أن مضادات الواقـع لا تكون، آلياً، صادقة عندما تكون مقدماتها بالفعل مناقـضة إلى الحقيقـة، ولنأخـذ المثـال التالي:

(1 ′) إذا كان الرسام فان كوخ عاش حتى سن 70 عاماً، فإنه أصبح ملكة بريطانيا.

22- subjunctive.

بما أن المقدم كاذب، فإن القضية الشرطية ($1'$) تكون صادقة، عندما يكون الـرابط (إذا كان... فإن...) في ($1'$) يعبر عن استلزم دالة صدق (أي استلزام مادي) وهكـذا تكـون القضية (1) صادقة، ولكن هذا خطأ واضح. إن القضية (1) معقولـة أكـثر مـن القـضية ($1'$). وهكذا، فإن مضادات الواقع ليست نوعاً مـن اسـتلزامات دالـة الـصدق، ويـصبح مـن الخطأ التعبير عنها بواسطة $\alpha \rightarrow \beta$.

من جهـة أخـرى، نـستطيع رؤيـة أن مـضادات الواقـع ليـست اسـتلزامات دقيقـة، وسنوضح هذا أدناه:

نحن نعلم أن خاصية التعدي تصح بالنسبة إلى الاستلزام الدقيق، أي أن:

$$P \succ Q, Q \succ R \vdash P \succ R$$

ولكن هذه الخاصية نفسها لا تصح بالنسبة إلى مضادات الواقع.

لنأخذ الحجة التالية:

إذا كانت الأميرة ديانا ماتت وهي في بداية شبابها، فإنها لم تكن قد قتلت.

إذا لم تكن الأميرة ديانا قد قتلت، فإنها من المحتمل أن تكون حية الآن.

إذاً، إذا كانت الأميرة ديانا ماتت وهي في بداية شبابها، فإنها من المحتمل أن تكون حية الآن.

هـذه الحجـة خاطئـة، وهـذا يبـين أن مـضادات الواقـع ليـست هـي الاسـتلزامات الدقيقة.

وبالتالي فلا يمكننا اعتبار مضادات الواقع على أنها استلزام مادي أو استلزام دقيـق. وإن أهمية دراسة مضادات الواقع تنبع من أهميتها الخاصة المتعلقـة بالممارسـة العمليـة مثلاً، بالنـسبة إلى المـؤرخين الـذين يـستخدموها في تقـويم الأحـداث والـدوافع والخطـط السياسية، فيتحدثون عمّا كان من شأنه أن يحدث، لو كان الأمر بخلاف ما تـم في الواقـع. وتنتشر قضايا مناقضة الواقع في الشعر والنثر على السواء. ولقد قام الفيلسوف الأمريكي د. لويس بتطوير نظرية مضادات الواقع في بداية سبعينيات القرن الماضي.

سنرمز لرابط استلزامات مضادات الواقع بواسطة $\rightarrowtail$[23]. وهكذا، سنحصل على صيغة جديدة هي $\alpha \rightarrowtail \beta$، حيث α، β صيغتان من حساب القضايا. سندرس دلالة هذه الصيغة أدناه.

من المفيد، عند دراستنا لقيم صدق $\alpha \rightarrowtail \beta$، أن نتذكر أن الاستلزام الدقيق $\alpha \succ \beta$ يكون صادقاً في عالم w، إذا كانت β صادقة في كل عالم ممكن تكون فيه α صادقة. عندما نفسر الرابط (إذا كان... فإن...) كاستلزام دقيق، فإن هذا يؤدي بنا إلى قراءة الاستلزامات الشرطية بالقول إنه إذا كان المقدم صادقاً في كل عالم ممكن، فإن التالي يكون صادقاً في كل عالم ممكن أيضاً، أي أنه، في كل الحالات الممكنة التي يكون فيها المقدم صادقاً، يجب أن يصدق التالي أيضاً. إن هذا التحليل لا يكون مناسباً في حالة استلزامات مضادات الواقع. وكنا قد رأينا في مثال سابق، كيف يؤدي هذا التحليل إلى تقبل حجة أنها صحيحة، في الوقت الذي تكون خاطئة بوضوح (نشير هنا إلى خاصية التعدي).

إن هذا التحليل يقودنا إلى اعتبار أن بعض القضايا الصادقة، على أنها كاذبة، فمثلاً القضية:

(3) إذا أنت قفزت من سطح عمارة عالية فإنك تصاب.

صادقة، ولكنها تكون كاذبة إذا اعتبرنا، هنا، أن الرابط (إذا كان... فإن...) يعبر عن استلزام دقيق وبالتأكيد، يوجد عالم ممكن أن تقفز من سطح عمارة عالية كعمل بهلواني مثير وتتعلق في شبكة بسلام. وربما، يوجد عالم، حيث ينقض ملاكك الحارس للإمساك بك قبل أن ترتطم بالأرض. إن مغزى هذا المثال هو أن الكثير من العوالم الممكنة تكون غير عادية وحتى غريبة. ونحن نتجاهل هذه العوالم عندما نقوم بتقويم استلزامات مضادات الواقع كصادقة أو كاذبة، ولكن الاستلزام الدقيق يعير اهتماماً لكل عالم.

23- لقد استخدم د. لويس رمزا آخر مشابه.

إن هذا يؤدي إلى حصر أنفسنا عند التفكير حول مضادات الواقع بـالعوالم العاديـة أو غير الغريبة أو نقول المشابهة[24] للعالم الواقعي. وهكذا، فـإن دلالـة $\alpha \mapsto \beta$ تعـرف كما يلي:

$\alpha \mapsto \beta$ تكون صادقة إذا كانت β صادقة في كل العوالم المشابهة للعالم الـواقعي، والتي تكون فيها α صادقة.

باستخدام تعريف الدلالة هذا، تبقى حجة خاصية التعدي السابقة صحيحة.

لنفرض، أننا قمنا بترتيب عـوالم ممكنـة حـول عالمنـا، حـسب مـشابهتها لـه. بعـض العوالم شديدة الشبه به فمثلاً، العالم الواقعي شديد الشبه بالعالم الـذي تحـك فيـه أنفـك وأنت تقرأ هذه القضية، ولكن عالمنا مختلف تماماً عن العالم الناتج لو أن النـازيين ربحـوا الحرب العالمية الثانية. أي أن، بعض العوالم تكون بعيدة نسبياً عن عالمنا الواقعي، ونقـول بعيدة بدرجات عن عالمنا الواقعي.

عند تقويم استلزامات مضادات الواقع، نحن نريد أن نركز انتباهنا عـلى مجموعـة خاصة من العوالم الممكنـة، التـي يـصدق فيهـا مقـدم الاسـتلزام، وتكـون مـشابهة لعالمنـا الواقعي. نحن نريد النظر فقط إلى تلك العوالم المشابهة (الأقرب) للعـالم الـواقعي. وهـذه العوالم مختلفة فيما بينها بدرجات كافية لجعل المقدم صادقاً، ولكن هذا الاخـتلاف لـيس أكبر من المطلوب.

إن مفهوم التشابه هنا، يقودنـا إلى العـوالم الأكـبر أو الأقـل شـبهاً مـن عـالم معـين. سنعتبر تلك العوالم بالأكبر موصولية أو الأقـل موصـولية مـن هـذا العـالم المعـين. أي، أننـا سنقوم بتغيير واحد في نموذج كريبكة هنـا، وهـو جعـل علاقـة الموصـولية R في النمـوذج تمتلك درجات. وسنستخدم الأعـداد الحقيقيـة مـن 0 إلى 1 للتعبـير عـن هـذه الـدرجات. فالصفر سيحتل الفقدان التام لعلاقة الموصولية بين عالمين، و1 سيمثل أقصى درجات علاقة الموصولية بين عالمين. من الواضح، أن كل عالم يكون موصولاً من نفسه بأقصى درجـة، أمـا بقية العوالم فأقل موصولية منه. وهكذا، فسنقوم بربط الأزواج المرتبة مـن العـوالم، التـي تمثل علاقـة الموصـولية R في نمـوذج كريبكـة بعـدد حقيقـي n ($0 \leq n \leq 1$) يـشير إلى درجة موصولية العنصر الثاني في الزوج المرتب من العنصر الأول.

24- similar.

مثال:

$$R = \{((w_1, w_1), 1), ((w_1, w_2), 0,6), ((w_2, w_1), 0)\}$$

إن هذا يعني أن w_1 موصول (يشابه) من نفسه بدرجة 1 ,w_1 موصول من w_2 بدرجة 0.6 وw_1 غير موصول من w_2، لأن درجة موصوليته 0. وكل هذا سنكتبه هكذا:

درجة موصولية w_1 من نفسه تساوي 1 $\quad d\,R\,(w_1, w_1) = 1$

درجة موصولية w_2 من w_1 تساوي 0.6 $\quad d\,R\,(w_1, w_2) = 0,6$

درجة موصولية w_1 من w_2 تساوي صفر $\quad d\,R\,(w_2, w_1) = 0$

إن الحرف d يمثل كلمة (درجة)[25].

إن تعريف صدق مضادات الواقع يصبح كالتالي:

$$V\,(\alpha \mapsto \beta, w) = T$$

إذا وفقط إذا وجد عالم u بحيث $V\,(\alpha, u) = T$ ولا يوجد أي عالم t بحيث إن d $R\,(w, u)$ $\geq R\,(w, t)$ ، $V\,(\alpha, t) = T$ و $V\,(\beta, t) = F$.

إن العالم u هو عالم عشوائي، وهو أحد العوالم الأكبر موصولية (الأكثر شبهاً) من العالم الواقعي، الذي يكون فيه المقدم صادقاً.

نستطيع أن نضع تعريف الصدق أعلاه بالشكل التالي:

$\alpha \mapsto \beta$ تكون صادقة في عالم w إذا وفقط إذا كانت:

(1) α صادقة في عالم w بحيث إن:

(2) β صادقة في عالم u وصادقة في كل العوالم الأكبر موصولية من w، مقارنة بالعالم u، والتي تكون فيها α صادقة.

من (1) و(2) نستطيع أن نقول إن $\alpha \mapsto \beta$ تكون صادقة في عالم w إذا كانت β صادقة في كل العوالم الأكثر شبها للعالم w، والتي تكون فيها α صادقة.

الآن نصل إلى كذب $\alpha \mapsto \beta$:

$$V\,(\alpha \mapsto \beta, w) = F$$

25- degree.

إذا وفقط إذا كان لكل عالم u بحيث إن $V(\alpha, u) = T$ فإنه يوجد عالم t بحيث إن $d R (w, u) \geq d R (w, t)$، $V(\alpha, t) = T$، $V(\beta, t) = F$.

مثال:

لنأخذ قضايا عكس النقيض التالية، وسنبين أنها خاطئة في مضادات الواقع:

إذا كانت القاهرة مدينة فإنها مدينة ملوثة بيئياً.

إذاً، إذا لم تكن القاهرة ملوثة بيئياً فإنها ليست مدينة.

حسب ما ذكرنا أعلاه، فإننا عند تقويم استلزام مضادات الواقع، نأخذ العوالم الأكثر شبهاً (أو الأكبر موصولية) للعالم الواقعي، والتي يكون فيها المقدم صادقاً. وهنا، يوجد عالم واحد من هذا النوع، بالنسبة إلى مقدمة الحجة وهو العالم الواقعي، تكون فيه القاهرة بالفعل مدينة. والآن، نتحقق فيما إذا كان التالي صادقاً بين كل عناصر هذا الصنف من العوالم ذي العنصر الواحد. والجواب، نعم فعلاً، لأن القاهرة ملوثة بيئياً. وهكذا، تكون المقدمة صادقة في العالم الواقعي.

أما بالنسبة إلى نتيجة الحجة، فإن مقدم النتيجة كاذب في العالم الواقعي، وهكذا فيجب أن يتحرك خيالنا نحو تلك العوالم الأقرب شبهاً للعالم الواقعي (أو الموصولة من العالم الواقعي) والتي تكون فيها القاهرة نظيفة. ويفترض وجود طرائق ممكنة عدة متساوية تقريباً، والتي يمكن أن يحدث هذا فيها. فيمكن ألا تكون الثورة الصناعية قد حدثت أبداً، ويمكن أن نكون قد طوَّرنا تقنية لتنظيف القاهرة. ليس في أي من هذه الإمكانات لا تكون القاهرة مدينة وبالتالي، فإن تالي نتيجة الحجة كاذب. وإذاً القضية الشرطية التي تمثل نتيجة الحجة كاذبة.

نستنتج من هذا المثال، أن قاعدة عكس النقيض غير صحيحة في استلزامات مضادات الواقع، لكن قاعدة الوضع صحيحة فيها.

وسنبرهن صحتها في المبرهنة التالية:

مبرهنة 1:

الاشتقاق:

$\alpha \mapsto \beta$ ، $\alpha \vdash \beta$

صحيح في نماذج مضادات الواقع.

البرهان:

سنستخدم طريقة البرهان غير المباشر: فنفرض أن الاشتقاق خاطئ، أي نفرض وجود نموذج يحوي العالم w، بحيث إن $V(\alpha \mapsto \beta, w) = T$ و $V(\alpha, w) = T$، بينما $V(\beta, w) = F$. الآن، باستخدام تعريف نموذج مضادات الواقع فإنه: من أجل كل عالم u، $dR(w,w) \geq dR(w, u)$. وبالتالي، فمن أجل كل u، يوجد عالم z لنسميه w، بحيث $dR(w,z) \geq dR(w, u)$، $V(\alpha, z) = T$ و $V(\beta, z) = F$.

إذاً، على وجه الخصوص، فمن أجل كل عالم u، بحيث إن $V(\alpha, u) = T$، يوجد عالم z، بحيث إن $dR(w,z) \geq dR(w, u)$، $V(\alpha, z) = T$ و $V(\beta, z) = F$. ولكن هذا يعني أن $V(\alpha \mapsto \beta, w) = F$، وهنا وصلنا إلى تناقض مع ما فرضناه أعلاه. إذاً، الاشتقاق صحيح في نماذج مضادات الواقع.

مبرهنة 2:

$\alpha \mapsto \beta$ أضعف من $\alpha \blacktriangleright \beta$

البرهان:

سنبرهن أنه من الصيغة $\alpha \blacktriangleright \beta$ تنتج (تشتق) الصيغة $\alpha \mapsto \beta$ ولكن من $\alpha \mapsto \beta$ لا تنتج $\alpha \blacktriangleright \beta$.

إذا كانت $\alpha \blacktriangleright \beta$ صادقة فإن β صادقة في جميع العوالم التي تكون فيها α صادقة، ومن هنا ينتج أن β صادقة في جميع العوالم المشابهة للعالم الواقعي التي تكون فيها α صادقة. إذاً من $\alpha \blacktriangleright \beta$ تنتج $\alpha \mapsto \beta$. ولكن العكس غير صحيح لأنه توجد عوالم تكون فيها α صادقة وβ كاذبة حتى ولو كانت $\alpha \mapsto \beta$ صادقة.

مبرهنة 3:

$\alpha \mapsto \beta$ أقوى من $\alpha \rightarrow \beta$

يترك البرهان كتمرين للقارئ.

3.4 تمارين:

(ا) برهن المبرهنتين التاليتين:

(1)- المبرهنة K_{14}: $LP \rightarrow (Q \blacktriangleright P)$

(2)- المبرهنة K_{15}: $L \urcorner P \rightarrow (P \blacktriangleright Q)$

(**ب**) حدد فيما إذا كانت كل من صور الحجج التالية صحيحة أم خاطئة.

1. المقدمات $P \supset Q, P$

النتيجة Q

2. المقدمات $P \supset Q, \neg Q$

النتيجة $\neg P$

3. المقدمات $P \equiv Q, P$

النتيجة Q

4. المقدمات $LP \supset L Q, L \neg Q$

النتيجة $M \neg P$

5. المقدمات $P \equiv \neg P, \neg P$

النتيجة $\neg Q$

(**ج**) حدد فيما إذا كانت الصيغة التالية صحيحة أم خاطئة.

$(\neg P \supset P) \leftrightarrow LP$

(**د**) حدد فيما إذا كان كل من الاشتقاقين التاليين صحيحاً أم خاطئاً.

1. $P \supset Q, Q \supset R \vdash P \supset R$

2. $\neg M P \vdash P \supset Q$

(هـ) برهن المبرهنة: $\alpha \mapsto \beta$ أقوى من $\alpha \rightarrow \beta$.

الفصل الخامس

منطق المحمولات الجهوي

Modal Predicate Logic

1.5 حساب المحمولات التقليدي (غير الجهوي):

قبل أن نقوم بدراسة منطق المحمولات الجهوي تركيباً ودلالة، سنقوم بتوضيح المفاهيم التي نحتاجها من حساب المحمولات التقليدي[26].

نعالج المحمول على أنه دالة قضائية (تسمى أيضاً دالة منطقية) بمتغير أو متغيرين أو أكثر بالاعتماد على ما تعكسه القضية من صفة لحد أو علاقة بين حدين أو أكثر. سميت دالة قضائية وذلك لتفريقها عن الدوال المستخدمة في الجبر، مثلاً: الدوال العددية، وعن الدوال المستخدمة في حساب القضايا والتي هي دوال صدق.

إن هذه المعالجة للمحمولات تكون مناسبة عندما تعكس القضية صفة أو علاقة بين الحدود.

يمكننا إعطاء تعريف للحد وهو: الثوابت والمتغيرات والدوال تسمى حدوداً. أما المحمول فهو كل صفة أو علاقة.

أولاً-اللغة الرمزية والترجمة لحساب المحمولات:

إن حساب المحمولات يمثل توسيعاً لحساب القضايا. وبهذا تكون لغة حساب القضايا جزءاً من لغة حساب المحمولات. وعليه، فإن هذه الأخيرة ستشمل رموزاً جديدة بالإضافة إلى رموز لغة حساب القضايا. وهكذا، فاللغة الرمزية لحساب المحمولات تتكون من:

26- يمكن للقارئ التعرف بالتفصيل على هذا الحساب بالرجوع إلى كتابنا: المنطق الرمزي المعاصر - نظري وتمارين محلولة، دار الشروق، عمّان، 2007.

1) الحروف الكبـيرة $A,B,C,...$ وهـذه الحـروف مـع دلائلهـا $A_1,A_2,...,B_1,B_2,...$ للتعبير عن متغيرات المحمولات.

2) الحروف f ، g ، h ، وهذه الحروف ودلائلها للتعبير عن الدوال.

3) رموز الروابط $\rceil$ ، Λ، V، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$.

4) القوسان (و) وهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

5) الحروف الصغيرة $a, b, c,...$ وهذه الحروف ودلائلها $a_1,a_2,...,b_1,b_2,...$ للتعبير عن الحدود التي هي ثوابت، والحروف الـصغيرة x, y, z للتعبـير عـن الحـدود التـي هـي متغيرات.

6) المكممان $\exists$، $\forall$.

ثانياً- تركيب لغة حساب المحمولات:

(قواعد بناء الصيغ)

تعريف: إذا كان P محمولاً ذا n حداً وكانت $a_1, a_2, ...,a_n$ هي n من الحدود، فإن $P_{a_1a_2...a_n}$ يسمى صيغة ذرية.

مثال: البصرة تقع إلى الجنوب من بغداد

الحدود: البصرة–b، بغداد-d.

المحمول: x إلى الجنوب من y: P_{xy}.

الترجمة : P_{bd}. هذه صيغة ذرية.

سنبني الآن الصيغ في حساب المحمولات حسب القواعد الأربع التالية:

1) الصيغة الذرية تكون صيغة.

2) إذا كانت α_1, α_2 صيغتين فإن:

$\rceil \alpha_1, (\alpha_1 \Lambda \alpha_2), (\alpha_1 V \alpha_2), (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), (\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$ تكون صيغاً.

3) إذا كان x متغيراً وα صيغة فإن:

$(\forall x)\ \alpha, (\exists x)\ \alpha$

تكون صيغتين.

4) أي تتابع آخر من الرموز لا يكون صيغة.

الكثير من المناطقة يستخدمون مصطلح (الصيغة جيدة التكوين) مقابل (الـصيغة) الذي استخدمناه نحن من أجل الاختصار.

ثالثاً- المتغيرات الحرة والمتغيرات المقيدة Free and Bound Variables

ذكرنا سابقاً بأن تكميـم المحمـولات يحولهـا إلى قـضايا. إن أدوات التكمـيم $\forall$، $\exists$ تؤثر في متغيرات المحمولات.

تعريف: نطاق مكمم في صيغة ما هو المكمم نفسه مع أقصر صـيغة تـلي المكمـم مباشرة.

أمثلة على نطاق المكمم $(\forall x)$

$$(\forall x)\ (M_x \rightarrow (\forall y)(R_y \rightarrow \urcorner H_{xy})) \qquad (1)$$

$$(\forall x)\ R_x \rightarrow (\forall y)(R_y \rightarrow M_{xy}) \qquad (2)$$

نطاق المكمم الكلي في الصيغة (1) هو (1) كلها، أما النطاق في (2) فهو $(\forall x)\ R_x$.

تعريف: يسمى المتغير x في صيغة ما مقيداً إذا وفقط إذا كان ضمن نطاق المكمم $(\forall x)$ أو $(\exists x)$، وإذا لم يكن كذلك في حالة واحدة على الأقل فيسمى المتغير x حر.

المتغيران x وy في المثال (1) مقيدان. المتغير x مقيد وحر في المثال (2)، أمـا المتغـير y فمقيد.

مثال:

(1) المتغير x في $(\exists x)\ P_{xy}$ مقيد أما y فحر.

(2) في الصيغة $(\forall x)\ (x > y)\ V\ (\exists x)\ (x < 1)$ المتغير x مقيـد لأنـه مـرة ضـمن نطاق المكمم $(\forall x)$ ومرة ضمن نطاق المكمم $(\exists x)$.

تعريف: تسمى الصيغة قضية إذا لم تمتلك أي متغيرات حرة.

2.5 تركيب ودلالة حساب المحمولات الجهوي:

إن لغة حـساب المحمـولات الجهـوي هـي بكـل بـساطة، لغـة حـساب المحمولات التقليـدي، يـضاف إليهـا المـؤثران الجهويـان L وM، وكـذا تـضاف

الصيغة $L\alpha$ إلى قواعد بناء صيغ حساب المحمولات التقليدي. ونتبنى التعريـف: $\neg L \neg \alpha$ تع $\equiv M\alpha$.

وهكذا، فإن صيغ حساب المحمولات الجهوي ستتضمن صيغاً، مثل:

$$L (\forall_x) (P_x \rightarrow Q_x), (\forall_x) L (P_x \rightarrow Q_x), (\exists_x) (MP_x \wedge Q_x)$$

وبإضافة علاقة الهوية (=) فسنحصل على صـيغ حـساب المحمـولات الجهـوي مـع الهوية، مثل:

$$L (a = b), M \neg (\exists_x) (x = a)$$

دلالة حساب المحمولات الجهوي تتم دراستها بواسطة أشجار صدقها، التي تتضمن قواعد اشتقاق أشجار الصدق في منطق قضايا الجهة (الفصل الثاني)، مضافاً إليها 4 قواعـد اشتقاق جديدة هي:

(1) قاعدة نفي المكمم الجزئي $\neg\exists$:

$$\checkmark \neg (\exists x)\alpha \quad w$$

.

.

.

$$(\forall x) \neg \alpha \quad w$$

(2) قاعدة نفي المكمم الكلي $\neg\forall$:

$$\checkmark \neg (\forall x)\alpha \quad w$$

.

.

.

$$(\exists x) \neg \alpha \quad w$$

(3) قاعدة التمثيل الوجودي[27] تم. و:

$$\checkmark (\exists x)\alpha \quad w$$

.

.

.

$$\beta \quad w$$

27- existential instantiation.

حيث β هي صيغة تنتج عن استبدال أي ظهور حر إلى x في α بواسطة ثابت ليكن a، حيث إن a ثابت جديد على فرع الشجرة هذا.

(4) قاعدة التخصيص الكلي[28] تخ.ك:

$$(\forall x)\ \alpha \quad w$$

.

.

.

$$\beta \quad w$$

حيث β هي صيغة تنتج عن استبدال أي ظهور حر إلى x في α بواسطة أي حد ثابت، ليكن a.

مثال **1**:

باستخدام شجرة صدق الصيغة $(\forall_x)L\ P_x \to L\ (\forall_x)\ P_x$، سنحدد فيما إذا كانت هذه الصيغة صحيحة أم خاطئة.

1.	$\neg((\forall_x)\ LP_x \to L\ (\forall_x)\ P_x)$	0
2.	$(\forall_x)\ LP_x$	0
3.	$\neg L\ (\forall_x)\ P_x$	0
4.	$M\ \neg(\forall_x)\ P_x$	0
5.	0R1	
6.	$\neg(\forall_x)\ P_x$	1
7.	$(\exists_x)\ \neg P_x$	1
8.	$\neg Pa$	1
9.	LPa	0
10.	Pa	1
11.	x	

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق قاعدة النفي $\neg\to$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة $\neg L$. الخطان 5 و6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخط 7 اشتق من 6 بتطبيق قاعدة نفي المكمم الكلي $\neg\forall$. الخط 8 اشتق من 7 بتطبيق قاعدة التمثيل الوجودي تم.و، باستبدال x

28- universal specification.

بواسطة a. الخط 9 اشتق من 2 بتطبيق قاعدة التخصيص الكلي تخ.ك باستبدال x بواسطة a. الخط 10 اشتق من 9 باستخدام قاعدة الضرورة L. الشجرة مغلقة لوجود الصيغة المتناقضة Pa و$Pa\ \rceil$ عليها. إذاً الصيغة المعطاة صحيحة.

مثال **2**:

سنحدد فيما إذا كانت هذه الصيغة $L(\exists x)\ Px \rightarrow (\exists x)\ LPx$ صحيحة أم خاطئة.

1.	$(x)\ LPx \rightarrow L\ (\exists x)\ Px\exists))\ \rceil$	0
2.	$x)\ LPx\exists)$	0
3.	$L(\exists x)\ Px\ \rceil$	0
4.	$M\ \rceil(\exists x)\ Px$	0
5.	LPa	0
6.	Pa	0
7.	R10	
8.	$x)\ Px\exists)\ \rceil$	1
9.	$x)\ \rceil Px\forall)$	1
10.	$Pa\ \rceil$	1
11.	x	

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\rightarrow \rceil$. الخط 4 اشتق من 3 باستخدام القاعدة $L\ \rceil$. الخط 5 اشتق من 2 باستخدام القاعدة تم.و. الخط 6 اشتق من 5 باستخدام القاعدة L. الخطان 7 و8 حصلنا عليهما من 4 باستخدام القاعدة M. الخط 9 اشتق من 8 باستخدام القاعدة $\exists\ \rceil$. الخط 10 اشتق من 9 باستخدام القاعدة تخ.ك. الشجرة مغلقة لوجود Pa و$Pa\ \rceil$، والصيغة صحيحة.

3.5 حساب المحمولات الجهوي مع الهوية:

سنقوم الآن بإضافة الهوية (=) إلى حساب المحمولات الجهوي. وقاعدتا اشتقاق أشجار صدق الهوية هما:

1- قاعدة استبدال المتطابقات[29] اس.م:

29- substitutivity of identicals.

$$m = n, \quad w$$

$$\alpha, \quad w$$

.

.

.

$$\beta, \quad w$$

حيث β هي صيغة تنتج عن استبدال ظهور واحد أو أكثر إلى m في α بواسطة n، أو استبدال ظهور واحد أو أكثر إلى n في α بواسطة m.

2- قاعدة الإغلاق:

$$m \neq m \quad w$$

.

.

.

x

مثال 3:

لنحدد صحة الصيغة $a=b \rightarrow L\,(a=b)$ باستخدام شجرة الصدق:

1. $\rceil (a=b \rightarrow L\,(a=b))$ 0
2. $a = b$ 0
3. $\rceil L\,(a = b)$ 0
4. $M \rceil (a = b)$ 0
5. 0R1
6. $\rceil (a = b)$ 1
7. $\rceil (a = a)$ 1
8. x

الخطان (الصيغتان) 2 و3 اشتقا من 1 بتطبيق قاعدة النفي$\rightarrow\rceil$. الخط 4 اشتق من 3 بتطبيق قاعدة نفي الضرورة $\rceil L$. الخطان 5 و6 حصلنا عليهما من 4 بتطبيق قاعدة الإمكانية M. الخط 7 اشتق من الخطين 2 و6 بتطبيق قاعدة استبدال المتطابقات اس.م. أغلقت الشجرة على الخط 8 بتطبيق قاعدة الإغلاق (التعبير $m\neq m$ هو اختصار للتعبير $\rceil (m=m)$).

مثال**4**:

لنحدد صحة الصيغة $L\,(a = b) \rightarrow (Pa \rightarrow Pb)$

1.	$\urcorner (L\,(a = b) \rightarrow (Pa \rightarrow Pb))$	0
2.	$L\,(a = b)$	0
3.	$\urcorner (Pa \rightarrow Pb)$	0
4.	$a = b$	0
5.	Pa	0
6.	$\urcorner Pb$	0
7.	$\urcorner Pa$	0
8.	x	

الخطـان 2 و 3 اشـتقا مـن 1 باسـتخدام القاعـدة $\rightarrow \urcorner$. الخـط 4 اشـتق مـن 2 باستخدام القاعـدة L. الخطـان 5 و 6 اشـتقا مـن 3 باسـتخدام القاعـدة $\rightarrow \urcorner$. الخـط 7 اشتق من 4 و 6 باستخدام القاعدة اس. م. الشجرة مغلقـة لوجـود Pa و $\urcorner$ Pa والـصيغة صحيحة.

4.5 تمارين:

حدد فيما إذا كانت كل من الصيغ التالية صحيحة أم خاطئة، وذلك بإنشاء أشـجار الصدق:

(1) $(\forall x)\, MPx \rightarrow M\,(\forall x)\, Px$

(2) $L\,(\forall x)\, Px \rightarrow (\forall x)\, LPx$

(3) $M\,(\forall x)\, Px \rightarrow (\forall x)\, MPx$

(4) $a \neq b \rightarrow L\,(a \neq b)$

(5) $(a = b) \rightarrow (LPa \rightarrow LPb)$

(6) $(a = b) \rightarrow (Pa \rightarrow LPb)$

الفصل السادس

منطق الزمن ومنطق الأخلاق

Tense logic and Deontic logic

1.6 منطق الزمن:

يرتبط منطق الزمن بشدة بمنطق الجهة. ونحن نفهم الزمن كتتابع مرتب خطياً من اللحظات الزمنية، التي تمثل السياقات أو العوالم الممكنة. أما علاقة الموصولية التي تربط هذه اللحظات بعضها ببعض فهي علاقة (قبل)[30]. وهكذا فإن قولنا بأن العالم w_2 موصول من w_1 يقابله هنا: اللحظة الزمنية t_2 قبل (أبكر من) اللحظة t_1. وبما أن علاقة (قبل) تمتلك خواص التمثيل الخطي وهي: التعدي وعدم التماثل وعدم الانعكاس والترابط، وبسبب هذه الخواص نعبر عن علاقة قبل باستخدام الرمز $<$. وهكذا نقوم بترتيب لحظات الزمن بواسطة $<$، الذي يسمح لنا بتمثيل هذه اللحظات كأعداد صحيحة:

$$\ldots,-n,\ldots-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ldots$$

إن هذا التمثيل يعني أنه لا توجد بداية ولا نهاية للزمن ويجري على شكل خطوات متقطعة (غير متصلة). إن هذا الفهم للزمن يكون مناسباً عند أخذ الأيام كوحدات زمنية مثلاً، في التقاويم الشهرية. ولكننا لا نستطيع تمثيل الزمن بواسطة تجزئته إلى وحدات متقطعة، وإنما بواسطة تجزئته إلى وحدات غير متقطعة (متصلة)، وذلك بتمثيله كأعداد كسرية (نسبية)[31]، والتي تحتوي الأعداد الصحيحة وحيث توجد لحظة زمنية بين كل لحظتين زمنيتين. إن هذه الخاصية العامة للعلاقات تسمى خاصية التكاثف[32]، ويعبر عنها بواسطة الصيغة:

30- before (earlier than).

31- rational.

32- density.

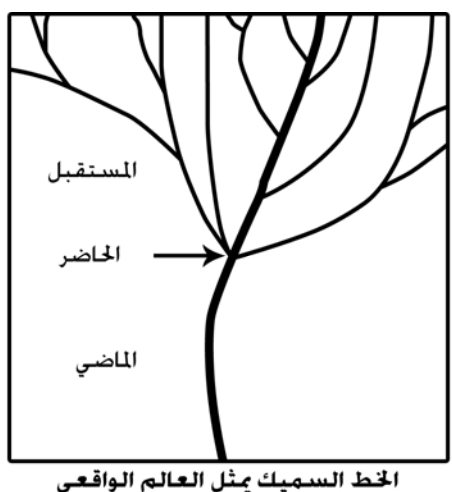
$$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((x \neq y \wedge xRy) \rightarrow (\exists z)\ (z \neq x \wedge z \neq y \wedge xRz \wedge zRy))$$

وهكذا، يصبح لا بداية ولا نهاية للزمن وبين كل لحظتين زمنيتين توجد دائماً لحظة أخرى. ونحن هنا نأخذ الزمن كأعداد كسرية نموذجاً لنا.

إن هذا الفهم ليس هو الفهم الوحيد، فنرى أن بعض المناطقة يستخدم (المجالات الزمنية)[33] كسياقات عوضاً عن اللحظات الزمنية. وباستخدام الخيار الأول، يصبح لنا موقع في الزمن وهو اللحظة الحاضرة. أما اللحظات الأخرى فتقع في الماضي أو المستقبل. الحاضر يتقدم بثبات نحو المستقبل، وهذا التقدم يعطي للزمن اتجاهه. والماضي هو اتصال من اللحظات الممتدة خلفنا حتى اللانهاية والغير القابل للتغيير. أما المستقبل، على العكس، فهو زاخر بالإمكانات.

إذا انطلقنا من الحاضر، فإن الأحداث يمكن أن تأخذ مسارات خيارية متعددة أو بعبارة أخرى: يوجد أكثر من مستقبل ممكن. وعلى الرغم من أن أحد المسارات هذه سيتحقق (وطبعاً، نحن لا نعرف أي مسار سيتحقق)، فإن المسارات الأخرى هي مسارات ممكنة.

إن هذا الفهم للزمن يؤدي إلى نموذج يكون فيه الزمن عبارة عن شجرة ذات جذع واحد (هو الماضي) والذي في نقطة معينة منه (الحاضر) يبدأ بالتفرع والتفرع مرات أخرى إلى فروع متشعبة (خيارات مستقبلية متعددة). وبتحرك الزمن فإن الفروع السفلية (الإمكانات الحية السابقة) تختفي. ويبقى طريق واحد عبر الشجرة يمثل المسار الواقعي للزمن، إنه العالم الواقعي. وبجريان الزمن إلى



الخط السميك يمثل العالم الواقعي

33- interval of time.

الأمام يتبين أكثر وأكثر هذا الطريق، بينما تتلاشى الفروع السفلى. المخطط التالي يبين جزءاً من الشجرة. صورة الزمن:

1.1.6 تركيب منطق قضايا الزمن:

من أجل دراسة تركيب هذا المنطق، سندخل هنا مؤثرين جديدين: G و H المشابهين إلى المؤثر الجهوي L.

المؤثر G يعني: دائماً سيكون الحال أن.

المؤثر H يعني: دائماً كان الحال أن.

وبما أن للمؤثر L مكمله M، كذلك فإن للمؤثرين G وH مكمليهما F و P على الترتيب.

المؤثر F يعني: أحياناً سيكون الحال أن

المؤثر P يعني: أحياناً كان الحال أن

إذا كانت α أي صيغة من حساب القضايا، فبتكميمها بواسطة المؤثرات الزمنية الأربعة أعلاه نقرأ:

$G\alpha$: دائماً ستكون α.

$H\alpha$: دائماً كانت α.

$F\alpha$: أحياناً ستكون α.

$P\alpha$: أحياناً كانت α.

المؤثرات الأربعة أعلاه هي مؤثرات أحادية والعلاقة بين كل مؤثر ومكمله تكون مشابهة للعلاقة بين L وM:

($M\alpha \Leftrightarrow \neg L \neg \alpha$ و $L\alpha \Leftrightarrow \neg M \neg \alpha$)

1. $G\alpha \Leftrightarrow \neg F \neg \alpha$ ونقرأ: دائماً ستكون α تكافئ: لن تكون أحياناً $\neg \alpha$.
2. $H\alpha \Leftrightarrow \neg P \neg \alpha$ ونقرأ: دائماً كانت α تكافئ لم تكن أحياناً $\neg \alpha$.
3. $F\alpha \Leftrightarrow \neg G \neg \alpha$ ونقرأ: أحياناً ستكون α تكافئ ليس دائماً ستكون $\neg \alpha$.
4. $P\alpha \Leftrightarrow \neg H \neg \alpha$ ونقرأ: أحياناً كانت α تكافئ لم تكن دائماً $\neg \alpha$.

مثال:

لتكن Q: أحمد يجري في الملعب.

إذاً:

G Q: دائماً سيجري أحمد في الملعب.

H Q: دائماً كان أحمد يجري في الملعب.

F Q: أحياناً سيجري أحمد في الملعب.

P Q: أحياناً جرى أحمد في الملعب.

بإدخال المؤثرات الأربعة G, H, F, P نستطيع كتابة الكثير من الصيغ الزمنية وهذا قسم منها مع تفسيراتها:

1. $GH\alpha$: دائماً سيكون أنه دائماً كانت α.

(هذا يعني أن α هي الحال في جميع الأزمان: الماضي، الحاضر والمستقبل).

2. $FH\alpha$: سيكون الحال أنه دائماً كانت α.

(هذا يعني أنه دائماً كانت α وستستمر لبعض الزمن).

3. $PH\alpha$: كان الحال أنه دائماً كانت α.

(هذا يعني وجد زمن سابق كانت دائماً α).

4. $HP\alpha$: دائماً كان الحال أنه كان الحال (لبعض الزمن) أن α.

5. $GP\alpha$: دائماً سيكون الحال أنه كانت α.

6. $FP\alpha$: سيكون الحال أنه كانت (لبعض الزمن) α.

نلاحظ إننا استخدمنا المؤثرين G و F للتعبير عن المستقبل واستخدمنا المؤثرين H و P للتعبير عن الماضي، أما الحاضر فلا نستخدم للتعبير عنه أي مؤثر.

2.1.6 دلالة قضايا الزمن:

تدرس دلالة منطق قضايا الزمن باستخدام نماذج كريبكة، بشكل مشابه لما مر بنا عند دراستنا لمنطق قضايا الجهة.

تعريف:

نموذج منطق قضايا الزمن S يتألف من:

1. مجموعة غير خالية T من لحظات زمنية.

2. علاقة (قبل) الثنائية R المعرفة على T، $R \subseteq T \times T$.

3. دالة صدق V تعين قيم صدق $V(P, t)$ لكل متغير قضائي P وكل لحظة زمنية t، حيث $t \in T$.

وكما في منطق قضايا الجهة فإن (T, R) هو الإطار الذي يسمى هنا أحيانا (محـور الزمن).

قبل أن نعطي تعريف الصدق نشير إلى أن الصدق الـذي كـان منـسوباً إلى العـوالم الممكنة في منطق قضايا الجهة يجب أن يكون منسوباً، هنا، إلى اللحظات الزمنية.

تعريف:

ليكن S نموذجاً حيث T مجموعة من اللحظات الزمنية وR علاقـة (قبـل) الثنائيـة على T. إذاً قيمة صدق أي صيغة من صيغ منطق قضايا الزمن في اللحظة (العالم) t تعرف كما يلي أدناه، حيث α أي صيغة من صيغ حساب القضايا:

1. $V(G\alpha,t) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل جميع t' $(t' \in T)$ حيث $t \, R \, t'$: $V(\alpha,t') = 1$

2. $V(F\alpha,t) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل t' واحدة على الأقل $(t' \in T)$ حيث $t \, R \, t'$: $V(\alpha,t') = 1$

3. $V(H\alpha,t) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل جميع t' $(t' \in T)$ حيث $t' \, R \, t$: $V(\alpha,t') = 1$

4. $V(P\alpha,t) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل t' واحدة على الأقل $(t' \in T)$ حيث $t' \, R \, t$: $V(\alpha,t') = 1$

إن مفهوم صحة الصيغ في الإطارات، الذي مر بنـا في منطـق قـضايا الجهـة سـنقوم بتطبيقه هنا على بعض صيغ منطق قضايا الـزمن، وسـنرى أيـاً مـن خـواص محـور الـزمن تعكسه هذه الصيغ إن وجدت.

الصيغتان:

$$(1).\ G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta)$$

$$(2).\ H(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (H\alpha \rightarrow H\beta)$$

من الواضح أنهما صحيحتان في أي محور زمني، ذلك أن G وH هما نـسختان مـن المؤثر الجهوي L وإن الصيغة الجهوية المقابلة إلى (1) و(2) هي:

$$L(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (L\alpha \rightarrow L\beta)$$

الصيغتان:

$$(3).\ G\alpha \rightarrow \alpha$$

$$(4).\ H\alpha \rightarrow \alpha$$

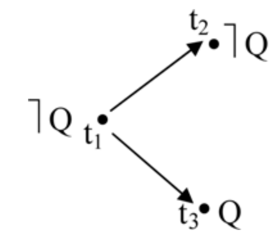
يقـابلان الـصيغة الجهويـة: $\alpha \rightarrow L\ \alpha$ وهـما مكافئتـان إلى $F\alpha \rightarrow \alpha$ (إذا α فإنه ستكون α) و $P\alpha \rightarrow \alpha$ (إذا α فإنه كانت α) على الترتيب. إذا كانت العلاقة R غير انعكاسية (أي لا توجد أي لحظة زمنيـة قبـل نفـسها) فـإن (3) و (4) تـصبحان غـير صحيحتين. ولكنه، وكما كان الحال في منطق قضايا الجهة فإن الخاصية غـير الانعكاسـية لا يمكن التعبير عنها بواسطة صيغة.

الصيغتان:

$$(5).\ P\alpha \rightarrow H\ (F\alpha \vee \alpha \vee P\alpha)$$

$$(6).\ F\alpha \rightarrow G\ (P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha)$$

صحيحتان في جميع النماذج التي تكون فيها علاقة الموصولية مترابطة (كل لحظتين مختلفتـين في الـزمن أحـدهما تكـون قبـل الأخـرى). لنأخـذ المخطط التالي حيث R ليست مترابطة:



بوضـع $V(Q,\ t_3)=1$ و $V(Q,\ t)=0$ مـن أجـل كـل t أخرى، يصبح لدينا مثال مضاد إلى (6)، ذلك أن FQ صـادقة في t_1، لأن Q صادقة في t_3. ولكن، $G\ (P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha)$ كاذبـة في t_1، لأن $P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$ كاذبة في t_2، وحيث لا تصح أي من الحالات التالية: $t_2 = t_3$, t_3Rt_2, t_2Rt_3، بينما t_3 هي اللحظة الوحيدة التي تكون فيها Q صادقة.

مبرهنة:

الصيغة $FP \rightarrow HFP$ صحيحة في الإطارات المتعدية.

البرهان:

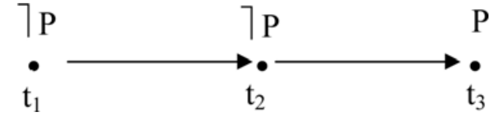
سنستخدم طريقة المثال المضاد للإطارات غير المتعدية.

لتكن:

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$

$$R = \{(t_1, t_2), (t_2, t_3)\}$$

هنا ليس عندنا t_1Rt_3، ومخطط النموذج يكون كالتالي:



ويصبح:

$V(P, t_3) = 1$ و $V(P, t) = 0$ من أجل كل t آخر.

لدينا الآن، مثال مضاد للصيغة، ذلك أن FP صادقة في t_2، لأن P صـادقة في t_3 و t_2 R t_3. ولكن HFP كاذبة في t_2 لأن FP كاذبـة في t_1، لأنـه لـيس عنـدنا t_1 R t_3، و t_3 هـي اللحظة الوحيدة التي تكون فيها P صادقة.

تستخدم أشجار الصدق في منطق الزمن بشكل مشابه لمنطق قضايا الجهـة، وذلـك باسـتخدام تعريـف صـدق الـزمن وإضـافة 4 قواعـد اشـتقاق مقابلـة للقاعـدتين: قاعـدة الضرورة L وقاعدة الإمكانية M كالتالي:

1- القاعدة G (قاعدة المؤثر G) والقاعدة H (قاعدة المؤثر H) تقـابلان قاعـدة الضرورة المعروفة L.

2- القاعـدة F (قاعـدة المـؤثرF) والقاعـدة P(قاعـدة المـؤثر P) تقـابلان قاعـدة الإمكانية المعروفة M.

إن قاعدة الموصولية R تبقى هي القاعدة R (قبل) التي تربط اللحظات الزمنيـة t والتي تمثل هنا أيضا بواسطة الأعداد 0،1،2،....

مثال: لنحدد صحة الصيغة $PGQ \rightarrow Q$

1. $\urcorner(PGQ \rightarrow Q),0$
2. PGQ,0
3. $\urcorner$Q,0
4. 1R0
5. GQ, 1
6. Q, 0
7. ×

الخطان (الصيغتان) 2،3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\urcorner \rightarrow$. الخط 5 اشتق من 2 باستخدام القاعدة P. الخط 6 اشتق من 5 باستخدام القاعدة G. الشجرة مغلقة لوجود Q,0 و $\urcorner$Q,0 والصيغة صحيحة.

2.6 منطق الأخلاق **Deontic logic**:

لبناء منطق قضايا الأخلاق، نحن نحتاج لمؤثرين يقـابلان L وM في منطـق قضايا الجهة. المؤثر الأول، نرمز له بواسطة O، وهو مؤثر الإلزام[34] ونقـرأه: مـن

34- obligation.

اللازم أن أو من الواجب أن. من الواضح أن O ليس دالة صدق. فإذا أردنا ملء جدول للسيطرة على معنى هذا المؤثر، فإننا لا نستطيع تحديد قيمة صدق لأي سطر:

Q	OQ
1	?
0	?

وللتوضيح نأخذ المثال التالي:

لتكن Q: الدولة رفعت الضرائب مؤخراً. نحن لا نستطيع من صدق Q هذه اشتقاق صدق إنه كان من اللازم أن ترفع الدولة الضرائب ولا ليس من اللازم أن ترفع الدولة الضرائب. وبالمثل، فإنه من صدق أني لا أملك مزرعة لا يمكن اشتقاق أنه من اللازم أن أملك ولا من غير اللازم أن أملك.

إن المؤثر المكمل لمؤثر الإلزام هو الذي نرمز له بواسطة P[35] ونقرأه: من المسموح به أن. وكما أن الإمكانية تعرف بواسطة الضرورة في منطق الجهة، فإن السماح يعرف بواسطة الإلزام. فإذا كان من المسموح لأحد أن يمارس السباحة، فإنه ليس من اللازم ألا يمارس. وبصورة عامة فإن شيئاً ما يكون من مسموح به إذا كان نفيه ليس إلزامياً:

$$PQ$$ إذا وفقط إذا كان $$\neg O \neg Q$$

وبالتالي فإن السماح ليس دالة صدق.

قواعد صدق منطق الأخلاق تماثل نظيراتها في منطق الجهة. نحن نحتاج، هنا، فقط إلى قاعدتين جديدتين تتعلقان بمؤثري الأخلاق: O وP. وهما يقابلان المؤثرين L وM، أما علاقة الموصولية R فسنستبدلها بواسطة العلاقة δ التي هي علاقة موصولية أخلاقية حيث:

$w_2 \, \delta \, w_1$ إذا وفقط إذا كان w_2 مسموحاً به أخلاقياً من w_1، من أجل أي عالمين w_1 وw_2.

وحسب بعض المناطقة مثل كانط، فإن هذا يعني أن جميع الأعمال في العالم w_2 تتفق مع القانون الأخلاقي الساري في w_1. ومن الطبيعي بالنسبة لهؤلاء المناطقة أن القانون نفسه يسري في جميع العوالم وإذاً، فإن أي عالم يكون

35- permission.

مسموحاً به أخلاقياً من عالم واحد يكون مسموحاً به أخلاقياً من جميع العوالم.

نعطي الآن قواعد صدق منطق الأخلاق:

1. $V(O\,\alpha, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل جمع العوالم u، حيث $w\,\delta\,u$، و $V(\alpha, u) = 1$

$V(O\,\alpha, w) = 0$

إذا وفقط إذا وجد عالم u، حيث $w\,\delta\,u$ و $V(\alpha, u) = 0$

2. $V(P\alpha, w) = 1$

إذا وفقط إذا وجد عالم u، حيث $w\,\delta\,u$ و $V(\alpha, u) = 1$

$V(P\alpha, w) = 0$

إذا وفقط إذا كان من أجل جميع العوالم u، حيث $w\,\delta\,u$، فإن $V(\alpha, u) = 0$

علاقات الموصولية الأخلاقية ليست انعكاسية، وذلك لأنه لا يمكننا الافتراض بأن ما يكون إلزامياً يكون صادقاً، وهكذا فلا يمكن أن تكون لدينا $LP \longrightarrow P$، والتي تعكس الخاصية الانعكاسية لعلاقة الموصولية ولكن علاقة الموصولية الأخلاقية متسلسلة. والحقيقة أنه إذا لم تكن δ متسلسلة فإن أي صيغة متناقضة تصبح إلزامية في عالم ما. وبالتالي، تكون متطلبات أخلاقنا غير متسقة[36]. والمبرهنة التالية تبرهن ذلك.

مبرهنة:

إذا لم تكن δ متسلسلة، فإنه يوجد عالم w، بحيث إن $V(O\,\alpha, w) = 1$ من أجل أي صيغة α.

لنفرض أن δ ليست متسلسلة. إذاً يوجد عالم w، بحيث إنه لا تصح الحالة $w\,\delta\,u$ لكل عالم u. الآن، لتكن α أي صيغة. بما أنه لا توجد عوالم u بحيث إن $w\,\delta\,u$، أذاً $V(\alpha, u) = 1$ من أجل جميع u، حيث $w\,\delta\,u$. وهكذا، فإن $V(O\,\alpha, w) = 1$، حسب القاعدة 1 أعلاه.

لقد برهنا أنه إذا كانت δ ليست متسلسلة، فإنه يوجد عالم w حيث $V(\alpha, w) = 1$ لكل صيغة α والتي يمكن أن تكون صيغة متناقضة.

36- inconsistent.

وعلى خلاف، الصيغة $LP \rightarrow P$، فإنه يمكن أن تكون لدينا $LP \rightarrow MP$، ذلك أنه إذا كانت LP تعني من اللازم أن P فإن MP تعني من المسموح أن P (ليس من اللازم أن ليس P). وهكذا، فإن $LP \rightarrow MP$ تعني ما هو لازم يكون مسموحاً به، وهذا يبدو صحيحاً بدرجة كافية. (ومن الجدير بالذكر أن $LP \rightarrow MP$ تعكس الخاصية المتسلسلة للعلاقة الموصولية). إن تفسير L هذا يدعى التفسير الأخلاقي، ولهذا السبب تسمى $LP \rightarrow MP$ بالصيغة D، والنسق المحصول عليه بواسطة إضافتها إلى النسق K يسمى D، كما مر بنا في الفصل الثالث.

3.6 تمارين:

(أ) ترجم إلى اللغة العادية كلاً من صيغ منطق الزمن التالية:

(1) $HG\alpha$

(2) $PG\alpha$

(3) $FG\alpha$

(4) $GF\alpha$

(5) $HF\alpha$

(6) $PF\alpha$

(ب) ترجم القضايا التالية إلى صيغ منطق الزمن:

(1) الآن أنت شاب، ولكن في يوم ما لن تكون كذلك.

(2) أنا مخلص لك وسأكون دائماً كذلك.

(3) قرأ أحمد رواية (خريف البطريق)، وكذلك فعل سليم.

(4) عندما دخلت خلود الغرفة، كان علي قد وضع الشاي على النار.

(ج) برهن أن الصيغة الزمنية التالية صحيحة:

$$\alpha \rightarrow HF\alpha$$

(د) برهن أن صورة حجة منطق الأخلاق التالية صحيحة:

المقدمات:

$$O\,A,\ O\,(A \rightarrow B)$$

النتيجة:

$O\,B$

الفصل السابع

منطق المعرفة ومنطق الاعتقاد

Epistemic Logic and belief logic

1.7 منطق المعرفة:

لقد أدى تطور المنطق الرياضي في النصف الثاني من القرن العشرين إلى توافر مدخل صوري لدراسة مفهوم المعرفة. ولقد كان هذا المفهوم موضوعاً للدراسات الفلسفية منذ القدم.

سنعالج هذا المفهوم عن طريق منطق الجهة ونماذج كريبكة. ومن أجل ذلك، لنأخذ المثال التوضيحي التالي:

لنتصور أن شخصاً من القاهرة يتساءل عن طبيعة الطقس في الرباط، وعلى وجه الخصوص، فيما إذا كان الطقس ممطراً. سيأخذ هذا الشخص في اعتباره حالتين ممكنتين: الأولى يكون فيها الجو ممطراً في الرباط، والثانية لا يكون الحال فيها كذلك. لاحظ، أن انعدام معرفة الشخص يمكن تمثيله بواسطة عدد الحالات الممكنة، التي يأخذها الشخص في الحسبان قدر الإمكان. ومن الواضح، أن عدد الحالات الممكنة سيزداد عندما تنعدم المعرفة حول قضايا أكثر. وبشكل عام، فإذا جهل شخص عن صدق n من القضايا الذرية، فإنه يجب عليه الأخذ بالحسبان 2^n من الحالات. فمثلاً، إذا كان شخص يجهل بشكل تام المعرفة حول فيما إذا كان الطقس ممطراً في الرباط (P) وفيما إذا كان ممطراً في الجزائر (Q)، فإن عليه حساب 4 حالات: واحدة تكون فيها P صادقة وQ صادقة، وواحدة تكون فيها P صادقة وQ كاذبة، وواحدة تكون فيها P كاذبة وQ صادقة، وواحدة تكون فيها P

كاذبة وQ كاذبة. وبما أن الحالات تنجم عن انعدام المعرفة، فإنها تسمى عـوالم الخيـارات المعرفية، أو اختصاراً الخيارات المعرفية[37].

يمكن دراسة هذه الخيارات المعرفية عـن طريـق عمـل نمـاذج لهـا في إطـار دلالـة العوالم الممكنة لكريبكة.

تعريف:

نموذج كريبكة S يتألف من:

(1) مجموعة غير خالية W من العوالم الممكنة.

(2) علاقة ثنائية R معرفة على W، أي أن $R \subseteq W \times W$.

(3) دالة صدق V تعين قيمة صدق $V (P, w)$ لكل متغير قـضائي P في كـل $w \in W$.

باستخدام هذا النموذج يمكننا القيام بالتمثيل الدقيق لما يعتبره الـشخص خيـارات معرفية. فبإعطاء حالة معينة (ممثَّلة أيضا بواسطة عالم ممكن w، حيث $w \in W$) يمكننا إعطاء الخيارات المعرفية للشخص بواسطة المجموعة:

$$\{m \in W / \ w \ R \ m\}$$

أي جميع العوالم الممكنة m الموصولة مـن w بواسـطة العلاقـة R. سـنقوم بعـرض المثال أعلاه بواسطة نماذج كريبكة، (انظر المخطط أدناه).

لنفرض أن الحالة الفعلية (الحقيقية)، والتي لا يمتلك الـشخص عنهـا معرفـة تامـة، هي أن الطقس ممطر في الرباط ولكنه ليس ممطراً في الجزائر. هذه الحالة الفعلية نمثلها بواسطة $w_1 \in W$ حيث $V (P, w_1) = 1$ و $V (Q, w_1) = 0$. الآن، يمكـن تعريـف نمـوذج كريبكة أعلاه بأخذ:

$$W = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$$

37- epistemic alternatives.

حيث إن العالم الممكن w_0 هو الحالة:

$$V (P, w_0) = V (Q, w_0) = 1$$

أما w_1 فهو الحالة التي بدأنا بها:

$$V (P, w_1) = 1 , V (Q, w_1) = 0$$

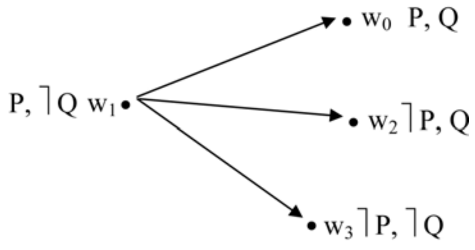
العالم w_2 هو الحالة:

$$V (P, w_2) = 0 , V (Q, w_2) = 1$$

العالم w_3 هو الحالة:

$$V (P, w_3) = V (Q, w_3) = 0$$

والعلاقة R معرفة بواسطة w_1Rm من أجل كل $m \in W$.



باستخدام نماذج كريبكة نستطيع تشكيل منطق الجهة للمعرفة. وسنبدأ بإدخال المؤثر K [38]، الذي نفسره: (من المعروف أن) وسنعرف دلالته في نموذج كريبكة (W, V, R) و $w \in W$ بواسطة القضية:

$$V (K\alpha, w) = 1$$

إذا وفقط إذا كان $V (\alpha, m) = 1$ من أجل كل عالم m، حيث wRm.

إن هذه القضية تنص على أنه: في عالم ممكن w، من المعروف (بواسطة شخص) أن الصيغة α تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت α صادقة في جميع العوالم الممكنة m التي يعتبرها الشخص خيارات معرفية.

بما أن المعرفة تفترض وجود شخص عارف a، فإن الكثير من المناطقة يستخدمون رمزاً يشير إلى هذا الشخص فيكتبون الرمز $K_a\alpha$ ليعني أن الشخص a يعرف α.

38- knowledge.

باستخدام الروابط: $\neg$ ، $\vee$، $\wedge$، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$، مع دلالاتها التي نعرفها نستطيع بناء صيغ أكثر تعقيداً من المتغيرات القضائية، وذلك من أجل استكمال منطق المعرفة كالتالي:

(1) $V(\neg\alpha, w) = 1$

إذا وفقط إذا كانت $V(\alpha,w) = 0$

(2) $V(\alpha \vee \beta,w) = 1$

إذا وفقط إذا كانت $V(\alpha,w) = 1$ أو $V(\beta,w) = 1$

(3) $V(\alpha \wedge \beta,w) = 1$

إذا وفقط إذا كانت $V(\alpha,w) = 1$ و $V(\beta,w) = 1$

(4) $V(\alpha \rightarrow \beta,w) = 1$

إذا وفقط إذا كانت $V(\alpha,w) = 0$ أو $V(\beta,w) = 1$

(5) $V(\alpha \leftrightarrow \beta,w) = 1$

إذا وفقط إذا كانت $V(\alpha,w) = V(\beta,w)$

وأخيراً، نقول إن الصيغة α في منطق المعرفة تكون صحيحة، إذا كانت $V(\alpha, w)$ $= 1$ من أجل جميع نماذج كريبكة $S = (W, R, V)$ وجميع $w \in W$.

باستخدام التفسير الذي أعطيناه للمؤثر K وهو (من المعروف أن)، نحصل مباشرة على عدة صيغ صحيحة:

1. $K(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (K\alpha \rightarrow K\beta)$

2. $\alpha \rightarrow K\alpha$

أما الصيغة:

3. $K\alpha \rightarrow \alpha$

فتكون صحيحة في نماذج كريبكة، التي تكون علاقة الموصولية R فيها انعكاسية.

وكنا قد برهنا، في الفصل الأول، أن $L\alpha \rightarrow \alpha$ صحيحة عندما تكون R انعكاسية.

4. $K\alpha \rightarrow KK\alpha$

تنص هذه الصيغة على أنه: إذا عرف أحدهم α فإنه يعرف أيضاً أنه يعرف α. الصيغة 4 صحيحة في نماذج كريبكة التي تكون علاقة الموصولية R فيها متعدية. ولقد برهنا، في الفصل الأول، أن $L\alpha \rightarrow LL\alpha$ صحيحة عندما تكون R متعدية. هذه الصيغة هي بديهية النسق S_4 ولذلك يسمى S_4 نسق المعرفة. كما أنها تسمى بديهية الإدراك الإيجابي[39].

يبنى منطق المعرفة كنسق صوري، وذلك بأخذ ما عندنا من نسق منطق القضايا وقاعدة الوضع والأشكال البديهية[40] التالية:

$$K_1: K(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (K\alpha \rightarrow K\beta)$$

$$K_2: K\alpha \rightarrow \alpha$$

$$K_3: K\alpha \rightarrow KK\alpha$$

$$K_4: KK\alpha \rightarrow K\alpha$$

K_1 هي نسخة من البديهية K للنسق K، K_2 هي نسخة من البديهية T للنسق T، K_3 هي نسخة من البديهية$_4$ للنسق S_4 (الفصل الثالث).

نضيف أيضاً قاعدة الضرورة المعرفية: من α نشتق $K\alpha$.

نشير إلى أن K_1، K_2، K_3، K_4 تحمل الأسماء: التوزيع، الصدق لأنها تنص عن صدق المعرفة: إذا كانت α معروفة فإن α صادقة، الإدراك الإيجابي، قابلية نقل المعرفة.

عادة تضاف بديهية أخرى، والتي تقول شيئاً حول معرفة الجهل[41] وتسمى بديهية الإدراك السلبي.

$$\neg K\alpha \rightarrow K \neg K\alpha$$

هذه البديهية تنص على أنه: إذا لم تعرف α فإنه تعرف إنه لا تعرف α. وبالتأكيد فإن هذه البديهية مستبعدة صحتها بالنسبة إلى أي بشر. ولكنها تضاف بالنسبة إلى أداة صناعية في علم الحاسوب والذكاء الاصطناعي، حيث يستخدم منطق المعرفة من أجل وصف معرفة الأنظمة الاصطناعية مثل أنظمة الحاسوب، وأنظمة المعلومات والأنظمة الذكية والإنسان الآلي.

39- positive introspection.

40- axiom schemes.

41- knowledge of ignorance.

2.7 منطق الاعتقاد:

يجد الناس فائدة في أن تنسب اعتقـادات إلى أنـاس آخـرين، فالاعتقـادات تـساعد على صنع تنبؤات حول ما سيفعله الآخرون.

إن مفهومي المعرفة والاعتقاد مرتبطان أحدهما بالآخر ولكنهما مختلفان، فـنحن لا نقول، مثلاً، إن شخصاً ما يعرف شيئاً كاذباً ولكن من الممكن القول إنه يعتقد شيئاً كاذبـاً. سندرس اعتقادات الأشـخاص لأننـا نريـد أن نـسمح لإمكانيـة أن تكـون تلـك الاعتقـادات كاذبة.

باستخدام العوالم الممكنة، نقوم بربط مجموعة من العـوالم الممكنـة بكـل شـخص، ونقول إن الشخص يعتقد بقضية ما في عالم معطى في حالة كـون القـضية صـادقة في كـل العوالم الموصولة من هذا العالم المعطى. سنقوم بتمثيل القضايا حول اعتقادات الأشـخاص بواسـطة الـصيغ. ولهـذا سـندخل المـؤثر الجهـوي B[42] وتفـسيره: (مـن المعتقـد أن) أو (شخص[43] يعتقد أن)، وبما أنه لا يمكن لشخص أن يعرف شـيئاً كاذبـاً فنـستطيع تعريـف المؤثر K بواسطة B كالتالي:

$$K\,\alpha \equiv_{\text{تع}} B\alpha \wedge \alpha$$

وهذا يعني أن معرفة شخص للصيغة α هـو اعتقـاده بالـصيغة α وأن تكـون α صادقة. بما أن الاعتقاد يفترض وجود شخص معتقد a، فإن الكثير من المناطقة يستخدمون رمزاً يشير إلى هذا الشخص فيكتبون الرمز $B_a\alpha$ ليعني أن: الشخص a يعتقد أن α.

إن بديهيات نسق منطق الاعتقاد هي نفسها بديهيات نسق منطق المعرفة، ماعـدا بديهية الصدق التالية، والتي تنص على أن المعرفة صادقة:

$$K\alpha \rightarrow \alpha$$

أي أنه: إذا كانت α معروفة فإن α صادقة.

42- belief.

43- agent.

بأخذ النسق S5 ماعدا بديهية الصدق أعلاه نحصل على النسق K45 والـذي يمثـل نسق الاعتقاد وبديهياته هي:

1- بديهيات أي نسق لمنطق القضايا.

$$2\text{- } B(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (B\alpha \rightarrow B\beta)$$

$$3\text{- } B\alpha \rightarrow BB\alpha$$

$$4\text{- } \neg B\alpha \rightarrow B\neg B\alpha$$

البديهية الرابعة تنص: (إذا كان شخص لا يعتقد أن α، فإنه يعتقـد أنـه لا يعتقـد أن α).

وقواعد اشتقاقه:

1- قاعدة الوضع.

2- قاعدة الضرورة NB: من α نشتق $B\alpha$.

إن علاقة الموصولية في نماذج كريبكة بالنسبة للنسق K45 يجب أن تكون متعديـة وإقليدية، وهذه الأخيرة تعني أنه:

$$(w_1Rw_2 \wedge w_1Rw_3) \rightarrow (w_2Rw_3)$$

من أجل كل w_1, w_2, w_3 في النموذج.

أخيراً، سنعرض لعدة خواص تصدق بالنسبة إلى المؤثر المعرفي K، وكـذا بالنـسبة إلى مؤثر الاعتقاد B، وهكذا فسنستعمل المؤثر L للدلالة على K أو B:

$$1\text{- } (L\alpha \wedge L(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow L\beta$$

$$2\text{- } (\alpha \leftrightarrow \beta) \Rightarrow L\alpha \leftrightarrow L\beta$$

$$3\text{- } (L\alpha \wedge L\beta) \rightarrow L(\alpha \wedge \beta)$$

$$4\text{- } L\alpha \rightarrow L(\alpha \vee \beta)$$

$$5\text{- } \neg(L\alpha \wedge \neg L\alpha)$$

'1 الخاصية الأولى تقول: إذا كانت كـل مـن α و $\alpha \rightarrow \beta$ معـروفتين ومعتقـدتين فإن β معروفة ومعتقدة.

'2 الخاصـية الثانيـة تقـول: صـيغتا الاسـتلزام الثنـائي الـصحيح تكونـان كلتـاهما معروفتين ومعتقدتين أو كلتاهما غير معروفتين وغير معتقدتين.

3' الخاصية الثالثة تقول: إذا كانت α معروفة ومعتقدة وβ معروفة ومعتقدة فإن وصل α وβ يكون معروفاً ومعتقداً.

4' الخاصية الرابعة تقول: إذا كانت α معروفة ومعتقدة فإن α تكون معروفة ومعتقدة أو β معروفة ومعتقدة.

5' الخاصية الخامسة تقول: من غير الممكن أن تكون صيغة ونفيها معروفة ومعتقدة.

الفصل الثامن

المنطق الحدسي

Intuitionistic logic

لقد كان مفهوم الصدق، بالنسبة لنا، مفهوم الدلالة الأساسي في كل ما درسناه في المنطق لحد الآن. والصدق هو نوع من التقابل بين القضايا أو الأفكار والواقع. ولكن، هناك من يشك في إمكانية الوصول للصدق بهذا المعنى وذلك، انطلاقاً باعتقاده بعدم إمكاننا الوصول إلى العالم كما هو بحد ذاته. فمثلاً، أستطيع التفكير أن الماء يغلي ثم أذهب إلى الموقد وأرى أنه يغلي. ولكن رؤيتي أو سماعي (أو حتى لمسي) للماء لا يكشف الماء كما هو في الواقع، ولكنه يكشف الماء كما أراه أو أسمعه أو أشربه. وبعبارة أخرى، أستطيع مقارنة تفكيري مع الماء كما هو مكتشف من قبلي وليس مع الماء كما هو في حد ذاته.

يوجد بين الفلاسفة من يقترح أن تؤسس دلالتنا لا على علاقات تكون بين أفكارنا والواقع وإنما على علاقات بين أفكارنا والأدلة[44]، مثل البراهين والإثباتات والتأكيدات. إن إدراكي الحسي للماء هو شكل من أشكال الأدلة والذي يبرهن أو يثبت أو يؤكد أفكاري أو حكمي بأن الماء يغلي.

إن هذه التجربة (الإدراك الحسي) تسمى الحدس[45]. ولقد كان بروور[46] (العالم الرياضي الألماني) مؤسساً للحدسية، حيث اهتم في البداية بالرياضيات وليس بالعالم بشكل عام. ولقد اعتبر أن الأشياء الرياضية (الأعداد، الدول، المجموعات،...إلخ) موجودة فقط بالطريقة التي ننشئها (نبنيها) بها. وكمثال

44- evidences.

45- intuition.

46- brouwer (1881-1966).

بسيط، لنأخذ 2+3=5 والتي يتم إثباتها بواسطة الإنـشاء[47] كالتـالي: أنـشئ 2، أنـشئ 3، وقارن الحـصيلة مـع نتيجـة إنـشاء 5. الحـصيلة هـي إثبـات للمتـساوية أعـلاه. والقـضايا الرياضية بالنسبة إليه، تكون صادقة ليس في عالم موجود مستقل وإنما هي مبرهنة (قيمـة أولى) أو مدحضة (قيمة ثانية) أو لا مبرهنة ولا مدحضة (قيمة ثالثة) بواسـطة أدلـة عـن طريق حسابات وبراهين نجريها نحن.

وبشكل عام، فإن مفهوم الصدق التقليدي يتم تعويضه بمفهوم البرهان أو الـدليل. وهكذا، فصدق صيغة α يعني أننا نملك برهان للصيغة α. وبالتالي، فـإن صـدق الـصيغة $\neg\alpha$ (سنستخدم $\neg$ عوضاً عن النفي التقليدي $\urcorner$) يعني دحـض α، أي اشـتقاق صـيغة متناقضة من α، وهذا يعني برهان $\urcorner\alpha$. (أي أن الـصدق التقليـدي يقابـل البرهـان عنـد الحدسيين، والنفي التقليدي يقابل الدحض عند الحدسيين). ولكن لـيـست جميـع القـضايا الرياضية هي إما مبرهنة أو مدحضة بل توجد قـضايا لـيـست مبرهنـة ولـيـست مدحـضة. وهكذا، فإن الحدسيين يرفضون قانون الثالـث المرفـوع $K \vee \neg K$ الـذي يعرفونـه: α مبرهنة أو α مدحضة وهكذا، فإن المنطق الحدسي هو غير تقليدي ومميز.

لقد ذكرنا أعلاه بـأن صـدق α في المنطـق التقليـدي يقابلـه برهـان α في المنطـق الحدسي. أما برهان $\alpha \wedge \beta$ فهو برهان α وبرهان β، وبرهان $\alpha \vee \beta$ فهـو برهـان α أو برهـان β. أمـا بالنـسبة إلى $\alpha \rightarrow \beta$، فـنحن نعلـم أن هـذا الاسـتلزام يكـون صـادقاً تقليدياً إذا كانت α كاذبـة أو β صـادقة، ولكـن الفهـم الحـدسي المؤسـس عـلى مفهـوم البرهان، يقول إن برهان $\alpha \supset \beta$ (سنستخدم $\supset$ عوضاً عن $\rightarrow$) يكـون كالتـالي: $\alpha \supset \beta$ تكون مبرهنة، إذا تم برهان β من α المبرهنة سابقاً.

يعتقد الحدسيون بأن المنطق يحتل مكانـاً ثانويـاً بالمقارنـة مـع الرياضـيات، وبـأن المنطق يمثل مجموعة من المبادئ اكتشفت للتحكم بالاستدلالات الرياضية، وهذا يتنـاقض مع المفهوم التقليدي للمنطق، على أنه العلم الذي يدرس المبادئ التي تطبق عـلى جميـع الاستدلالات، وبغض النظر عـن موضـوع بحـد ذاتـه، وعـن أنـه أكـثر النظريـات أساسـية وعمومية والتي تصبح حتى الرياضيات ثانوية بالنسبة لها.

47- construction.

ووفقاً لما ذكرناه أعلاه، وبافتراض أننا نعرف برهان القضايا الذرية (المتغيرات القضائية)، فإن برهان القضايا المركبة (الصيغ المركبة)، المكونة باستخدام الروابط يكون كما يلي أدناه:

1- برهان $P\wedge Q$ هو زوج يشمل برهان p و برهان Q.

2- برهان $P\vee Q$ هو برهان P أو برهان Q.

3- برهان $\neg P$ هو برهان أنه لا يوجد برهان إلى P.

4- برهان $P\supset Q$ هو إنشاء نستطيع بواسطته إعطاء برهان إلى Q، وذلك بمعرفة برهان P.

نشير إلى أنه يمكن تفسير المنطق الحدسي بواسطة منطق الجهة باستخدام التعريفين التاليين:

التعريف 1 $\qquad \neg\alpha \equiv_{\text{تع}} L\rceil\alpha$

التعريف 2 $\qquad \alpha\supset\beta \equiv_{\text{تع}} L(\alpha\rightarrow\beta)$

أي أن $\neg\alpha$ يعني من المستحيل α. وأن $\alpha\supset\beta$ يعني من الضروري $\alpha\rightarrow\beta$.

1.8 دلالة وتركيب المنطق الحدسي:

إن تركيب لغة المنطق الحدسي تتكون من الصيغ: $\neg\alpha$، $\alpha\vee\beta$، $\alpha\wedge\beta$، $\alpha\supset\beta$، حيث β، α أي صيغ من حساب القضايا.

باستخدام نماذج كريبكة نستنتج تفسير هذه اللغة بواسطة الثلاثية (W, R, V)، حيث R تمتلك الخاصيتين الانعكاسية والتعدي، كما هو الحال بالنسبة إلى النسق S4 الذي مر بنا وبالإضافة إلى الشرط التالي:

من أجل كل $w \in W$،

إذا كان $V(P, w) = 1$ و wRw' فإن $V(P,w') = 1$ وهذا الشرط يسمى (شرط الاكتساب).

تعريف قيم صدق الصيغ يكون كما يلي:

1. $V(\alpha \wedge \beta, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان $V(\alpha, w) = 1$ و $V(\beta, w) = 1$

2. $V(\alpha \vee \beta, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان $V(\alpha, w) = 1$ أو $V(\beta, w) = 1$

3. $V(\neg \alpha, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل كل w' حيث wRw'، $V(\alpha, w') = 0$

4. $V(\alpha \supset \beta, w) = 1$

إذا وفقط إذا كان من أجل كل w' حيث wRw'، $V(\alpha, w') = 0$ أو $V(\beta, w') = 1$

إن العالم، هنا، يعني حالة معلومات في زمن معين، أو أن الأشياء التي تصح في العالم هي تلك الأشياء التي تم برهانها في ذلك الزمن. أما wRt فيعني أن t هو توسيع ممكن إلى w وقد تم الحصول على هذا التوسيع بواسطة برهان عدد (من الممكن أن يكون الصفر) من البراهين الإضافية. وهكذا تصبح R انعكاسية ومتعدية، لأن توسيع أي توسيع يكون توسيعاً أيضاً.

باستخدام تعريف الصدق أعلاه يصبح لدينا:

1. $\alpha \wedge \beta$ مبرهنة في زمن ما إذا وفقط إذا كانت α مبرهنة في هذا الزمن وكذلك β.

2. $\alpha \vee \beta$ مبرهنة في زمن ما إذا أو إذا وفقط إذا كانت α مبرهنة في هذا الزمن أو β.

3. إذا كانت $\neg \alpha$ مبرهنة في زمن ما، فإننا نمتلك برهان أنه لا يوجد برهان إلى α. وبالتالي فإن α لن تكون مبرهنة في أي وقت لاحق. وبالعكس، إذا لم تكن $\neg \alpha$ مبرهنة في زمن ما، فإنه على الأقل من الممكن برهان α، وبالتالي فإن α ستكون مبرهنة في زمن مستقبلي ممكن.

4. إذا كانت $\alpha \supset \beta$ مبرهنة في زمن ما، فإننا نمتلك إنشاءً يمكن استخدامه لأي برهان إلى α للحصول على برهان إلى β. وبالعكس، إذا لم تكن $\alpha \supset \beta$ مبرهنة في زمن ما، فإنه على الأقل من الممكن برهانها في زمن مستقبلي.

2.8 أشجار صدق المنطق الحدسي:

سنستخدم أشجار الصدق أيضاً، لدراسة دلالة المنطق الحدسي وهذه الأشجار هي تحوير لأشجار صدق منطق الجهة. وهذا التحوير يكمن أولاً، في أن الصيغ على الشجرة ستكون على الشكل $\alpha, + w$ و $\alpha, - w$. والحالة الموجبة تعني أن α صادقة في العالم w، أما الحالة السالبة فتعني أن α كاذبة في العالم w. كذلك، فإن الصيغ الأولية (المقدمات

ونفي النتيجة)، سنرمز لها بواسطة $\alpha, +0$ لكل مقدمة وبواسطة $\beta, -0$ لكل نتيجة.
وأخيراً، يتم غلق الفرع عند ظهور صيغ على الشكل $\alpha, + w$ و $\alpha, - w$.

1.2.8 قواعد الاشتقاق:

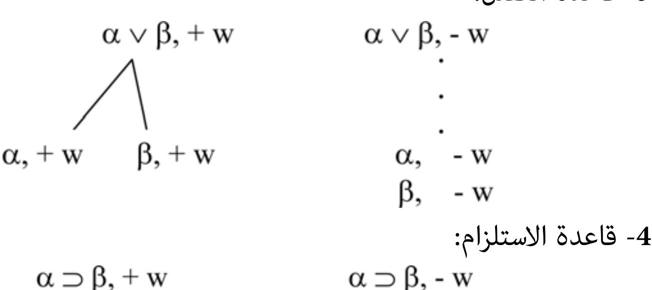
1- قاعدة النفي:

$$\begin{array}{ccc} \neg \alpha, + w & \quad & \neg \alpha, - w \\ wRt & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & wRt \\ \alpha, - t & & \alpha, + t \end{array}$$

2- قاعدة الوصل:

$$\begin{array}{ccc} \alpha \wedge \beta, + w & \quad & \alpha \wedge \beta, - w \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ \alpha, + w & & \alpha, - w \quad \beta, - w \\ \beta, + w & & \end{array}$$

3- قاعدة الفصل:



4- قاعدة الاستلزام:

$$\begin{array}{ccc} \alpha \supset \beta, + w & \quad & \alpha \supset \beta, - w \\ wRt & & . \\ & & . \\ & & . \\ \alpha, - t \quad \beta, + t & & wRt \\ & & \alpha, + t \\ & & \beta, - t \end{array}$$

5- قاعدة المتغير القضائي:

$$P, + w$$
$$wRt$$
.
.
.
$$P, + t$$

إن قاعدة الاستلزام (على اليسار) تطبق من أجل أي t على الفرع والأمر نفسه بالنسبة إلى قاعدة النفي (على اليسار). أما قاعدة الاستلزام (على اليمين) فتطبق من أجل t جديد. والأمر نفسه بالنسبة إلى قاعدة النفي (على اليمين). لمساعدة القارئ على حفظ قاعدتي الاستلزام والنفي لا ننسى أن $\alpha \supset \beta$ يعني $L(\alpha \rightarrow \beta)$ و $\neg\alpha$ يعني $L\rceil\alpha$، كما ذكرنا سابقاً.

القاعدة الأخيرة تطبق فقط على المتغيرات القضائية، وt يختلف عن w. وهذه القاعدة يتطلبها شرط الاكتساب، وسنسمي هذه القاعدة لاحقاً بقاعدة الاكتساب. لاحظ، أنه لا توجد قاعدة مناظرة لها بالنسبة إلى P, -w. وأخيراً، علينا أن نتذكر أن علاقة الموصولية R تتصف بخاصية الانعكاس والتعدي.

مثال:

سنبين أن النفي المضاعف يصح في المنطق الحدسي. أي أن الصيغة $P \supset \neg \neg P$ صحيحة فيه.

1	$P \supset \neg \neg P, - 0$
2	0R0
3	0R1
4	P, + 1
5	$\neg \neg P, - 1$
6	1R1
7	1R2
8	$\neg P, + 2$
9	2R2, 0R0
10	P, - 2
11	P, + 2
12	x

الخط 2 يبين أن R انعكاسية. الخطوط 3، 4 و 5 حصلنا عليهم من 1 بتطبيق القاعدة $\beta \supset \alpha$ الكاذبة. الخطان 7 و 8 حصلنا عليهما من 5 بتطبيق قاعدة $\neg$ الكاذبة. الخط 10 اشتق من 8 بتطبيق قاعدة $\neg$ الصادقة (وأن 2R2). الخط 11 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة المتغير القضائي (وأن 1R2). الشجرة مغلقة لوجود P, + 2 و P, - 2 عليها.

سنبرهن في المثال أدناه أن المنطق الحدسي هو منطق جزئي أصلي[48] من المنطق التقليدي، وذلك ببرهان $P \supset Q$ $\neg P \vee Q$، بينما $\nvdash$ نحن نعلم أن هذا الاشتقاق صحيح في المنطق التقليدي، حين نستبدل $\supset$ بواسطة $\rightarrow$ و$\neg$ بواسطة $\rceil$.

مثال:

$$\neg P \vee Q \nvdash P \supset Q$$

```
1               P ⊃ Q, + 0
2               ¬ P ∨ Q, - 0
3                 0R0
4                ¬ P. - 0
5                Q, - 0
6                 0R1
7                P, + 1
8                 1R1
                  /   \
9          P, - 0         Q, + 0
           /    \            x
10    P, - 1    Q, + 1
11      x
```

حصلنا على الخط 3 لأن R انعكاسية. الخطان 4 و5 اشتقا من 2 بتطبيق قاعدة الفصل الكاذبة. حصلنا على الخطين 6 و7 بتطبيق قاعدة $\neg$ الكاذبة على الخط 4. التفريع الأول والثاني حصلنا عليهما بتطبيق القاعدة $\supset$ على الخط 1 للعالمين 0 و1. لاحظ أنه، لا توجد إمكانية بتطبيق قاعدة الاكتساب.

48- proper sub-logic.

3.8 نسق المنطق الحدسي:

نسق هيتينغ[49] **Heyting's system**:

(النسق Int)

مكونات النسق الحدسي

(1) رموز لانهائية للنسق (أبجدية النسق):

(أ) الحـروف ...A,B,C وهـذه الحـروف ودلائلهـا $A_1,A_2,\ldots B_1,B_2,\ldots$ ونـدعوها المتغيرات القضائية. الرموز $\vee,\wedge,\supset,\neg$ وندعوها الروابط الأولية.

(ب) الرمزان (و) وندهوهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

(2) مجموعة الصيغ التي تتكون حسب القاعدتين:

(أ) المتغيرات القضائية في (1) تكون صيغاً.

(ب) إذا كانت β,α صيغتين فإن $\neg\alpha$ و $\beta\supset\alpha$، $\alpha\vee\beta$، $\alpha\supset\beta$ صيغ كذلك.

(3) أشكال البديهيات:

شكل البديهية A_1	$\alpha\supset(\alpha\wedge\alpha)$
شكل البديهية A_2	$(\alpha\wedge\beta)\supset((\beta\wedge\alpha)$
شكل البديهية A_3	$(\alpha\supset\beta)\supset((\alpha\wedge\gamma)\supset(\beta\wedge\gamma))$
شكل البديهية A_4	$((\alpha\supset\beta)\wedge((\alpha\supset\gamma)\supset(\beta\supset\gamma))$
شكل البديهية A_5	$\alpha\supset(\beta\supset\alpha)$
شكل البديهية A_6	$(\alpha\wedge(\beta\supset\alpha))\supset\beta$
شكل البديهية A_7	$\alpha\supset(\alpha\vee\beta)$
شكل البديهية A_8	$(\alpha\vee\beta)\supset(\beta\vee\alpha)$
شكل البديهية A_9	$(\alpha\supset)\wedge(\beta\supset\gamma))\supset((\alpha\vee\beta)\supset\gamma)$
شكل البديهية A_{10}	$\neg\alpha\supset(\alpha\supset\beta)$
شكل البديهية A_{11}	$((\alpha\supset\beta)\wedge(\alpha\supset\neg\beta))\supset\neg\alpha$

49- رياضي إنجليزي وأحد تلامذة بروور.

(الرمز ¬ هو الرمز المعتاد للنفي الحدسي). لاحظ أن أشكال البديهيات أعلاه تحتوي على كل الروابط $\neg, \vee, \wedge, \supset$، التي لا يعرَّف أحدها بواسطة الآخر في المنطق الحدسي. ولهذا، فيجب أخذها جميعها كروابط أولية، وهذا يرتبط بحقيقة عدم وجود جداول الصدق في المنطق الحدسي.

(4) قواعد الاشتقاق:

توجد في النسق Int قواعد الاشتقاق التالية:

(أ) الوضع.

(ب) العطف.

(ج) الاستبدال.

(5) المبرهنات:

مبرهنة 1 (قاعدة اشتقاق قع 1) $K \supset L, L \supset M \vdash K \supset M$

البرهان

1	$K \supset L$	م
2	$L \supset M$	م
3	$(K \supset L) \wedge (L \supset M)$	العطف 1,2
4	$((\alpha \supset \beta) \wedge (\beta \supset \gamma)) \supset ((\alpha \supset \gamma)$	A_4
5	$((K \supset L) \wedge (L \supset M)) \supset ((K \supset M)$	استبدال (K/α) (L/β) (M/γ) 4
6	$K \supset M$	الوضع 3,5

المبرهنة 1 هي قاعدة القياس الشرطي.

مبرهنة 2 $(K \wedge L) \supset K$

البرهان

1	$\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$	A_5
2	$K \supset (L \supset K)$	استبدال (K/α) (L/β) ,1
3	$(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \wedge \gamma)) \supset ((\beta \wedge \gamma)$	A_3
4	$(K \supset (L \supset K)) \supset (K \wedge L)) \supset ((L \supset K) \wedge L))$	استبدال (K/α) (L/γ) $(L \supset K/\beta)$,3
5	$(K \wedge L) \supset ((L \supset K) \wedge L)$	الوضع 2,4

6	$(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$	A_2
7	$((L \supset K) \wedge L) \supset L \wedge (L \supset K))$	استبدال $6,(L\supset K/\alpha)\ (K/\beta)$
8	$(\alpha \wedge (\alpha \supset \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$	A_6
9	$(L \wedge (L \supset K)) \supset K$	استبدال $8, (L/\alpha)\ (K/\beta)$
10	$(K \wedge L) \supset K$	المبرهنة1 (قع$_1$) 5,7,9

المبرهنة 2 هي إحدى صيغ قاعدة التبسيط.

مبرهنة 3 $(K \wedge L) \supset L$

البرهان

1	$(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$	A_2
2	$(K \wedge L) \supset (L \wedge K)$	استبدال $1, (L/\beta)\ (K/\alpha)$
3	$(L \wedge K) \supset L$	مبرهنة 2
4	$(K \wedge L) \supset L$	قع$_1$ 2,3

المبرهنة 3 هي أيضاً إحدى صيغ قاعدة التبسيط.

مبرهنة 4 $K \supset K$

البرهان

1	$\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$	A_1
2	$K \supset (K \wedge K)$	استبدال $1, (K/\alpha)$
3	$(K \wedge K) \supset K$	مبرهنة 2 استبدال (K/L)
4	$K \supset K$	قع$_1$ 2,3

مبرهنة5 $L \supset (K \vee L)$

البرهان

1	$\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$	A_7
2	$L \supset (L \vee K)$	استبدال $1, (K/\beta)\ (L/\alpha)$
3	$(\alpha \vee \beta) \supset (\beta \vee \alpha)$	A_8
4	$(L \vee K) \supset (K \vee L)$	استبدال $3, (L/\alpha)\ (K/\beta)$
5	$L \supset (K \vee L)$	قع$_1$ 2,4

مبرهنة 5 هي إحدى صيغ قاعدة الجمع.

4.8 نسق صوري آخر لمنطق القضايا الحدسي:

بالإضافة إلى نسق هيتينغ الصوري، الذي تعرضنا له فإنه توجد أنساق صورية أخرى لحساب القضايا الحدسي. سنورد واحداً من هذه الأنساق من دون إعطاء المبرهنات.

نسق دوميت[50] Dummett System (1977)

أ- الروابط الأولية: $\neg, \supset, \wedge, \vee$

ب- أشكال البديهيات:

1. $\alpha \supset (\beta \supset \alpha)$
2. $\alpha \supset (\beta \supset (\alpha \wedge \beta)$
3. $(\alpha \wedge \beta) \supset \alpha$
4. $(\alpha \wedge \beta) \supset \beta$
5. $\alpha \supset (\alpha \vee \beta)$
6. $\beta \supset (\alpha \vee \beta)$
7. $(\alpha \supset \beta) \supset (\alpha \wedge \gamma)) \supset ((\beta \wedge \gamma)$
8. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset (\beta \wedge \gamma)) \supset ((\alpha \wedge \gamma)$
9. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \supset \neg \beta)) \supset \neg \alpha)$
10. $\alpha \supset (\neg \alpha \supset \beta)$

ج- قواعد الاشتقاق:

(1) الوضع. (2) الاستبدال.

5.8 تمارين:

(أ) برهن أن الصيغة $\neg\neg P \supset P$ خاطئة في المنطق الحدسي باستخدام شجرة الصدق.

(ب) املأ المعلومات الناقصة في برهان كل من المبرهنتين التاليتين من نسق هيتينغ لحساب قضايا المنطق الحدسي:

(1)

مبرهنة 6 $K \supset L, K \supset (L \supset M) \vdash K \supset M$

البرهان

.1 $K \supset (L \supset M)$ م

.2 $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$

50- فيلسوف إنجليزي أكد أن معنى القضية هو طريقة برهانها.

3. $(K \supset (L \supset M)) \supset (K \wedge L) \supset ((L \supset M) \wedge L)$
4. $(K \wedge L) \supset ((L \supset M) \wedge L)$
5. $(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$
6. $((L \supset M) \wedge L) \supset ((L \wedge (L \supset M)$
7. $(\alpha \wedge (\alpha \supset \beta) \supset \beta$
8. $(L \vee (L \supset M)) \supset M$
9. $(K \wedge L) \supset M$
10. $(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$
11. $(L \wedge K) \supset (K \wedge L)$
12. $(L \wedge K) \supset M$
13. $(\alpha \rightarrow \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$
14. $(K \supset L) \supset ((K \wedge K) \supset (L \wedge K))$
15. $K \supset L$
16. $(K \wedge K) \supset (L \wedge K)$
17. $\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$
18. $K \supset (K \wedge K)$
19. $K \supset (L \wedge K)$
20. $K \supset M$

(2)

مبرهنة 7

$$K \supset L, K \supset (L \supset M) \vdash K \supset (L \wedge M)$$

البرهان

1. $(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$
2. $(K \rightarrow L) \supset ((K \wedge M) \supset ((L \wedge M))$
3. $K \supset L$
4. $(K \wedge M) \supset ((L \wedge M)$
5. $(K \supset M) \supset ((K \wedge K) \supset (L \wedge M))$
6. $K \supset M$
7. $(K \wedge K) \supset ((K \wedge M)$
8. $\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$
9. $K \supset (K \wedge K)$
10. $K \supset (L \wedge M)$

الفصل التاسع
المنطق المتعدد القيم
Many-Valued Logic

1.9 الحاجة إلى تعميم المنطق التقليدي:

يقوم المنطق التقليدي على مبدأ الثنائية، أي أن كل قضية تمتلك بالضبط إحدى قيمتي الصدق: صادقة أو كاذبة. وهذا المبدأ يجد تعبيره في القانونين:

1. الثالث المرفوع $K \vee \neg K$: القضية تكون صادقة أو كاذبة وليس ثمة أمر ثالث.

2. عدم التناقض $\neg(K \wedge \neg K)$: لا يمكن أن تكون القضية صادقة وكاذبة في الوقت نفسه.

ومنذ أن اعتمد المنطق مبدأ أن كل قضية إما أن تكون صادقة أو كاذبة (مبدأ الثالث المرفوع)، فقد ظلت الشكوك تدور حوله. ولقد دفعت أسباب عديدة بالكثير من المناطقة إلى عدم الاقتناع بمبدأ الثنائية هذا وسنوضحها أدناه.

(**1**) السبب الأول: الممكنات المستقبلية **Future Contingents**

لقد قام لوكاتشيفيج، عام 1920، بالخطوة الأولى نحو إدخال قيمة صدق ثالثة بالإضافة إلى قيمتي الصدق والكذب. لقد لاحظ لوكاتشيفيج صعوبات عند تقويم قيم صدق القضايا المعبرة عن الأحداث المستقبلية مثلاً، القضية (غداً سيهطل المطر). فالأحداث المستقبلية هي حتى الآن ليست صادقة أو كاذبة، فقيم صدقها غير معروفة وسيتم تحديد قيم الصدق هذه، عندما تقع هذه الأحداث. المنطق التقليدي ثنائي القيم ليس كافياً لتحديد قيم صدق هذا النوع من الأحداث، ولهذا فمن الطبيعي إدخال قيمة ثالثة غير الصدق المحض والكذب المحض، وهذا يقود إلى المنطق ثلاثي القيم. لقد سمى لوكاتشيفيج هذه القيمة، بالقيمة الممكنة.

لقد كتب لو كاتشيفيج ما يلي:

(أستطيع الافتراض من دون الوقوع في أي تناقض، بأن الفصل في أمر حضوري إلى فارصوفيا في لحظة معينة في السنة القادمة، مثلاً 21 ديسمبر ظهراً، هو في الوقت الحاضر لا يكون إيجابياً ولا سلبياً. وإذاً فمن الممكن، ولكن ليس من الضروري أني سأكون حاضراً في فارصوفيا في الوقت المذكور. وحسب هذا الافتراض فإن القضية (سأكون في فارصوفيا في 21 ديسمبر ظهراً) يمكن أن تكون في الوقت الحاضر ليست صادقة وليست كاذبة، ذلك أنه إذا كانت صادقة الآن فإن حضوري المستقبلي في فارصوفيا يصبح ضرورياً، وهذا يناقض الافتراض. وإذا كانت كاذبة الآن فإن حضوري المستقبلي في فارصوفيا يصبح مستحيلاً وهذا أيضاً يناقض الافتراض. وإذاً، فالقضية (سأكون في فارصوفيا في 21 ديسمبر ظهراً) في اللحظة الراهنة ليست صادقة وليست كاذبة ويجب أن تمتلك قيمة ثالثة تختلف عن 0 أو الكذب وعن 1 أو الصدق. هذه القيمة يمكننا تسميتها 1/2. إنها تمثل القيمة (الممكنة)[51] بالإضافة إلى القيمة (الصادقة) و(الكاذبة)، وبذلك فهي قيمة ثالثة. إن النسق الثلاثي القيم لحساب القضايا تعود جذوره إلى مجرى التفكير هذا)[52].

(2) السبب الثاني: المفارقات الدلالية **Semantic Paradoxes**

تزودنا المفارقات الدلالية ببراهين قوية مضادة لمبدأ الثنائية. ومفارقة (الكذاب)[53] إحداها والتي تأتي بأشكال متعددة. واحد من هذه الأشكال سنعرضه أدناه والمتعلق بالقضية:

هذه القضية كاذبة (1)

لنفرض أن (1) صادقة، إذاً ما تقوله يكون صحيحاً، وإذاً القضية كاذبة. ولنفرض الآن أن (1) كاذبة، إذاً ما تقوله ليس صحيحاً، وإذاً القضية صادقة. وبالتالي، فإن (1) تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت كاذبة. وهكذا لا نستطيع الحكم على قضية (هذه القضية كاذبة) بالصدق أو الكذب ولابد من قيمة ثالثة.

51- possible.

52- rescher, n. – many – valued logic, gregg revivals, hampshire, 1993.

53- liar paradox.

وهذا يناقض مبدأ الثنائية، فهي صادقة وكاذبة في الوقت نفسه، أي أن مفارقة الكذاب تقود عن طريق استدلال صحيح إلى تناقض ولهذا سميت مفارقة. القيمة الثالثة هنا تسمى هرائية أو بلا معنى[54].

(3) السبب الثالث: الغموض **Vagueness**

تبدو الكثير من التعبيرات أنها غامضة. لنأخذ المثالين التاليين:

1- هل هذه الرواية طويلة؟.   2- هل هذه المدينة كبيرة؟.

بعض الروايات تكون طويلة جداً، مثلاً رواية الحرب والسلام (تولستوي) وأخرى ليست طويلة بالتأكيد، مثلاً رواية قصة موت معلن (غابرييل غارسيا ماركيز). ولكن توجد روايات أخرى تقع فيما بينهما ومن الصعب القول فيما إذا كانت طويلة أم لا. وبالمثل، فإن لندن مدينة كبيرة بالتأكيد، بينما مدينة صور ليست كبيرة بالتأكيد. ولكنه من الصعب القول إن المدن: دمشق، وهران، الإسكندرية كبيرة أم صغيرة.

الآن لنأخذ القضيتين:

(3) هذه الرواية طويلة.   (4) هذه المدينة كبيرة.

هل هما صادقتان أم كاذبتان؟. من الصعب إعطاء جواب، ويمكن أخذ موقفين حول ذلك. فيمكن القول إنهما صادقتان أو كاذبتان ولكن من الصعب علينا تحديد ذلك ومشكلتنا هنا تكمن في عدم معرفتنا: أين توجد الحدود بين ما هو طويل وما هو غير طويل، وبين ما هو كبير وغير كبير. وهكذا فعند الجواب عن (1) و (2) نجد أن كلمة (نعم) أو (لا) ليستا كافيتين. وسنقول شيئاً ما مثل (طويلة باعتدال)، (بينَ بينْ)، (نوعاً ما كبيرة). وإذاً لا يمكننا القول إن (3) صادقة أو كاذبة والشيء نفسه بالنسبة إلى (4). وإذاً لابد من قيم أخرى تتوسط الصدق والكذب أو نقرر وجود (درجات) من الصدق والكذب.

إن ما ذكرناه من الأسباب الثلاثة أعلاه تسند فكرة وجود قضايا ليست صادقة وليست كاذبة. وهذه الأسباب تبرر ظهور المنطق المتعدد القيم، المنطق بأكثر من قيمتي

54- meaningless.

صدق. في الفقرات القادمة من هذا الفصل سنعرض بالتفصيل لأنساق من هذا المنطق، والتي تشترك جميعها في رفض قانون الثالث المرفوع، وتسمح للقضايا بأن تكون صادقة أو كاذبة أو ليست صادقة وليست كاذبة. كما أن فكرة وجود درجات من الصدق تحتم بناء نظرية وراءها، وسنقوم بذلك في الفصل الأخير من الكتاب - المنطق المرن.

(4) السبب الرابع: المنطق الحدسي **Intuitionistic Logic**

يعتقد الفيلسوف الإنجليزي م. دوميت، كما رأينا سابقاً، بأن معنى القضية هو طريقة برهانها وبالتالي فإن الصدق يعني البرهنة أو الإثبات، أما الكذب فيعني الدحض. إن هذا يقود إلى منطق يرفض قانون الثالث المرفوع، لأنه ليست جميع القضايا مبرهنة أو مدحضة، وبالتالي توجد قضايا ليست صادقة وليست كاذبة وإنما غير محددة. كذلك، فإن هذا المنطق يرفض قانون النفي المزدوج $\neg\neg K \rightarrow K$. ولقد ظهر هذا المنطق الحدسي كمنطق للرياضيات وأصبح مهماً، بشكل خاص، لعلوم الحاسوب حيث يكون مفيداً لمنطق البرامج.

إن جميع الأسباب التي استعرضناها أعلاه تشير إلى وجود فائدة من إدخال، على الأقل قيمة صدق واحدة جديدة بالإضافة إلى قيمتي الصدق والكذب. لندخل الآن قيمة واحدة ولنسميها I أو (غير محددة)[55]. إن إدخال هذه القيمة الثالثة يتطلب مراجعة جوهرية لجداول الصدق وقواعد تقويم حساب القضايا، ذلك أننا سنعيِّن للمتغير القضائي ليس فقط القيمة T أو F وإنما I أيضاً. كذلك فإن علينا تحديد تعامل الروابط مع هذه القيمة الجديدة، لا سيما وإنه لا توجد طريقة تعامل واحدة. سنفترض أن الصيغ المركبة تمتلك القيم T أو F عندما تكون قيم صدق مركباتها T أو F. ولكن ما قيم الصدق التي ستأخذها الصيغ المركبة في حالة أن تأخذ إحدى مركباتها القيمة I؟. في هذه الحالة يوجد حلان:

1. القيمة I (عدم التحديد) لجزء من الصيغة ينتقل إلى الصيغة كلها. وهكذا، فإذا كانت الصيغة تحوي جزءاً يمتلك القيمة I، فإن الصيغة كلها تمتلك القيمة I.

55- indeterminate.

2. إذا كانت قيمة صدق الصيغة كلها هي T أو F (قيم محددة) على جداول الصدق التقليدية من أجل صدق أو كذب بعض المركبات، حتى إذا كانت مركبات أخرى تأخذ القيمة I، فإن الصيغة كلها ستأخذ القيمة T أو F (قيم محددة).

إن الفرق بين هذين الحالين يصبح واضحاً في حالة صيغ الفصل. فلنفرض أن المتغير القضائي K يمتلك القيمة T، و L يمتلك القيمة I، فما هي قيمة $K \lor L$؟. حسب الحل الأول فإن عدم التحديد (أي القيمة I) سينتقل إلى الصيغة كلها وهكذا ستأخذ $K \lor L$ القيمة I، ولكن حسب الحل الثاني وكما نعرف فإن صدق إحدى المفصولتين سيكون كافياً تقليدياً لصدق صيغة الفصل كلها، وهكذا فإن $K \lor L$ ستأخذ القيمة T.

لقد فضل بعض المناطقة الحل الأول والبعض الآخر فضل الحل الثاني. سنعالج نحن الحلين بالإضافة إلى حل ثالث. لقد وضع العالم بوشفار نسقاً ثلاثي القيم على أساس الحل الأول. أما العالم كلين فقد وضع نسقاً آخر ثلاثي القيم على أساس الحل الثاني. أما العالم لوكاتشيفيج على الضد من كلين وبوشفار فقد أبقى على بعض الصيغ التكرارية في المنطق التقليدي (ثنائي القيم)، فمثلاً:

$$K \to K\ ,\ K \to (K \lor L)\ ,\ (K \land L) \to K\ ,\ K \to \neg\neg K$$

هي صيغ تكرارية في نسقه أيضاً. ولكنه لم يُبقِ على التكرارية التقليدية لصيغة الثالث المرفوع $K \lor \neg K$ وعلى تكرارية عدم التناقض $\neg(K \land \neg K)$.

2.9 المنطق الثلاثي القيم **3-Valued Logic**:

1.2.9 دلالة بوشفار **Bochvar's Semantics**:

B_3

في عام 1930 اقترح العالم الروسي بوشفار دلالة لحساب القضايا حسب الحل الأول. وقدمها كحل لمفارقة الكذاب وبما أن تفسيره للقيمة الثالثة هو (بلا معنى)، فإن الصيغ في دلالته تكون بلا معنى إذا كانت إحدى مركباتها بلا معنى.

لقد تم التوصل إلى تناقض من مفارقة الكذاب، وذلك بسبب استخدامنا لفرضية أن (هذه القضية كاذبة) تكون صادقة أو كاذبة، وبالتالي فليس من المستغرب أن تكون محاولة التغلب على هذا التناقض بنفي هذه الفرضية (الصدق

أو الكذب). لقد اقترح بوشفار من أجل التعامل مع مفارقة الكذاب تبني دلالة ثلاثية القيم، وحيث تكون فيها تفسير القيمة الثالثة I على أنها (بلا معنى). الجدولان أدناه يعكسان هذه الدلالة.

$\neg K$	K
F	T
T	F
I	I

K	L	$K \wedge L$	$K \vee L$	$K \rightarrow L$	$K \leftrightarrow L$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
T	I	I	I	I	I
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T
F	I	I	I	I	I
I	T	I	I	I	I
I	F	I	I	I	I
I	I	I	I	I	I

في حساب القضايا التقليدي (الثنائي القيم) يكون عدد أسطر جداول صدق الصيغ مساوياً إلى 2^n (n عدد المتغيرات القضائية). أما في حساب القضايا الثلاثي القيم فإن عدد أسطر جداول صدق الصيغ فهو 3^n (n عدد المتغيرات القضائية). نرى من الجدولين أعلاه أن عدد أسطر النفي، $\neg K$ هو $3^1 = 3$، أما عدد أسطر الروابط الأخرى (الثنائية) فهو $3^2 =$ 9.

نلاحظ من جدولي صدق B_3 أن بوشفار يتبنى، فعلاً، الحل الأول، فمثلاً بالنسبة للصيغة $K \rightarrow L$ نجد أن قيمتها تكون I، في حالة كون قيمة K هي I وقيمة L هي I.

ومن الواضح أن بوشفار لا يتبنى الحل الثاني، ذلك أنه عندما تكون K كاذبة فهذا يكفي تقليدياً أن تكون $K \rightarrow L$ صادقة، ولكننا نجد من السطر السادس أن $K \rightarrow L$ ليست صادقة. وفي الحقيقة فإن الصيغة التي هي تكرارية تقليدياً لا تكون تكرارية وفق دلالة بوشفار. فمثلاً، الصيغة $K \rightarrow K$ تكرارية تقليدياً، ولكنها عند بوشفار تأخذ القيمة I عندما تأخذ K القيمة I. إن كل صيغة من صيغ حساب القضايا التقليدي تأخذ قيمة I في حالة كون إحدى متغيراتها القضائية تأخذ القيمة I.

نستطيع توسيع تعريف التكرارية فنقول إن الصيغة التكرارية هي الصيغة التي لا تكون كاذبة في أي من أسطر جدول صدقها، أي التي تكون صادقة أو

غير محددة في كل أسطر جدول صدقها. بهذا التوسيع تكون جميع الصيغ التكرارية تقليدياً تكرارية في دلالة بوشفار.

من المهم الإشارة إلى أن بعض صور الحجج التي يشك فيها العديد من المناطقة، والتي هي صحيحة في حساب القضايا التقليدية، تصبح غير صحيحية في دلالة بوشفار. لنأخذ، مثلا ما يسمى (مفارقتي الاستلزام المادي):

$$L \vdash K \to L$$
$$\neg K \vdash K \to L$$

فعلى الرغم من صحتهما في حساب القضايا التقليدي، ولكننا نجدهما غير صحيحتين في دلالة بوشفار. فبالنسبة إلى الأولى نستطيع إعطاءها مثالاً مضاداً، وذلك بأخذ L صادقة وK غير محددة، وهكذا تصبح المقدمة صادقة والنتيجة غير محددة (ليست صادقة). أما بالنسبة إلى الثانية فمثالها المضاد يكون بأخذ K كاذبة وL غير محددة، وهكذا تصبح المقدمة صادقة والنتيجة غير محددة (ليست صادقة).

2.2.9 دلالة كلين **Kleen Semantics**:

K_3

لقد تبنى كلين الحل الثاني الذي مر بنا أعلاه، أي: إذا كانت قيمة صدق الصيغة تقليدية (T أو F) من أجل صدق أو كذب بعض مركباتها، فإن الصيغة كلها تأخذ قيماً تقليدية حتى إذا كانت مركبات أخرى لها تأخذ القيمة غير المحددة I. لقد أعطى كلين تفسيراً لقيمته الثالثة I على أنها (غير معرّفة) ووجدها في التطبيقات الرياضية، فمثلاً لنأخذ المحمول (الدالة القضائية) K_x، حيث إن K_x معرفة على جزء من مدى x. ليكن K_x:

$1 \leq 1/x \leq 5$. إذاً، K_x ستكون:

1. صادقة عندما تقع x بين 1/5 و 1.
2. غير معرفة عندما $x = 0$.
3. كاذبة في الحالات الأخرى ($x \neq 0$ و$x < 1/5$)$\vee$($1<x$).

إن الحل الثاني يجد تعبيره هنا في الجدولين التاليين المختلفين عن جدولي صدق بوشفار.

K	$\neg$K
T	F
F	T
I	I

K	L	K∧L	K∨L	K→L	K↔L
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
T	I	I	T	I	I
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T
F	I	F	I	T	I
I	T	I	T	T	I
I	F	F	I	I	I
I	I	I	I	I	I

لنقارن بين ما ينتج عن دلالة بوشفار وبين دلالة كلين:

1- الصيغ التكرارية في حساب القضايا التقليدي تكون غير تكرارية في نسق كلين، كما هو الحال في دلالة بوشفار، لأنه، وكما هو الحال في دلالة بوشفار، فإن أي صيغة في حساب القضايا التقليدي تأخذ جميع مركباتها القيمة I فإنها هي أيضاً تأخذ القيمة I. وإذاً، فمن أجل أي صيغة يوجد دائماً تعيين (هو إعطاء I إلى جميع المتغيرات القضائية) تكون حسبه الصيغة غير صادقة.

2- تختلف دلالة كلين عن دلالة بوشفار في أنها تجعل أكثرية صور الحجج في حساب القضايا التقليدي ومن ضمنها مفارقات الاستلزام المادي صحيحة. ولكن توجد بعض الاستثناءات، فمثلاً صورة الحجة $L \rightarrow L \vdash K$ صحيحة في حساب القضايا التقليدي ولكنها خاطئة عند كلين، فإذا أخذنا K صادقة وL غير معرفة، فإننا نحصل على مثال مضاد.

3- تعطي دلالة كلين قيمتي الصدق التقليدية T وF لصيغ مركبة أكثر مما تعطيه دلالة بوشفار (قارن جدولي صدق الروابط في كليهما).

3.2.9 دلالة لوكاتشيفيج **Lukasiewicz Semantics**: L_3

وضع لوكاتشيفيج، الذي كان المؤسس الأول للمنطق الثلاثي القيم، دلالته عام 1920 والتي يفسر فيها القيمة الثالثة على أنها (وسطية) أو (ممكنة) وتأخذها القضايا المستقبلية التي هي، كما مر بنا، ليست صادقة وليست كاذبة. لقد أعطت هذه الدلالة قيماً تقليدية (T وF) للصيغ المركبة بكمية أكبر مما مر بنا، والحل عند لوكاتشيفيج هو حل ثالث جوهره المزج بين الحلين الأولين. دلالة لوكاتشيفيج تجد تعبيرها في الجدولين أدناه:

$\neg K$	K
F	T
T	F
I	I

K	L	$K \wedge L$	$K \vee L$	$K \rightarrow L$	$K \leftrightarrow L$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
T	I	I	T	I	I
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T
F	I	F	I	T	I
I	T	I	T	T	I
I	F	F	I	I	I
I	I	I	I	T	T

لنقارن الآن بين دلالات بوشفار، كلين، لوكاتشيفيج:

1. تتطابق دلالتا كلين ولوكاتشفيتج باستثناء أن كلين يجعل الاستلزام والاستلزام الثنائي غير محددين عندما تكون مركباتهما غير محددتين، بينما يجعلهما لوكاتشفيتج صادقين.

2. يجعل لوكاتشفيتج بعض الصيغ في حساب القضايا تكرارية في الوقت الذي لا تكون كذلك عند كلين وبوشفار، مثل:

$$K \rightarrow K,\ K \leftrightarrow \neg\neg K,\ (K \wedge L) \rightarrow L$$

3. تبقي دلالة لوكاتشفيتج، كما هو الحال في دلالة كلين، على صحة أكثر صور الحجج المعروفة في حساب القضايا التقليدي باستثناء بعضها، مثلاً: $K \vdash \neg L \vee L$، حيث صورة الحجة هذه غير صحيحة، لأن مقدمتها صادقة في حين أن نتيجتها غير محددة، وذلك عندما تكون K صادقة وL غير محددة. ولكن $K \vdash L \rightarrow L$ تبقى صحيحة.

3.9 تعميم المنطق ثلاثي القيم: المنطق المتعدد القيم:

يمكن استخدام علاقات حسابية للتعبير عن قيم صدق روابط المنطق الثنائي، وذلك باستخدام 0 كرمز للكذب، 1 كرمز للصدق وبإضافة ½ كرمز للقيمة الثالثة، وذلك من أجل التعبير عن الروابط نفسها في المنطق ثلاثي القيم، الذي تصبح مجموعة قيم صدقه $T_3 = \{0, ½, 1\}$.

لتكن V(K) ترمز إلى قيمة صدق K، و V(L) ترمز إلى قيمة صدق L و $V(K \wedge L)$، $V(K \vee L)$، $V(K \rightarrow L)$، $V(K \leftrightarrow L)$ ترمز إلى قيم صدق الوصل، والفصل، والاستلزام، والاستلزام الثنائي على الترتيب. إذاً نحصل على العلاقات:

$$V(\urcorner K) = 1 - V(K) \quad (1)$$

$$V(K \wedge L) = \min(V(K), V(L)) \quad (2)$$

$$V(K \vee L) = \max(V(K), V(L)) \quad (3)$$

$$V(K \rightarrow L) = \min(1, 1 + V(L)) - V(K) \quad (4)$$

$$V(K \leftrightarrow L) = 1 - |V(K) - V(L)| \quad (5)$$

من أجل تعميم المنطق الثلاثي القيم، نسمح للقضية بأن تأخذ أكثر من ثـلاث قـيم.

لنفرض أنه من أجل $n \leq 3$ (حيث n عـدد طبيعـي) تمثّـل قـيم الـصدق بواسـطة أعـداد كسرية من المجال [0,1]. قيم الصدق هذه تشكل مجموعة صدق T_n كالتالي:

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1\right\} \quad (6)$$

مثال **1:**

لنأخذ نسق لوكاتشفيتج الثلاثي القيم حيث نعوض n = 3 في (6).

إذاً $T_3 = \{0, ½, 1\}$. لنفرض أن K وL تمتلكـان القيمتـين V(K) = ½ و V(L) = 1 على الترتيب. من العلاقات (1) إلى (5) وباستخدام مجموعة قيم الصدق T_3 نجد أن:

$$V(\urcorner K) = 1 - ½ = ½$$

$$V(K \wedge L) = \min(½, 1) = ½$$

$$V(K \vee L) = \max(½, 1) = 1$$

$$V(K \rightarrow L) = \min(1, 1 + 1 - ½) = \min(1, 3/2) = 1$$

$$V(K \leftrightarrow L) = 1 - |½ - 1| = 1 - |-½| = 1 - ½ = ½$$

مثال **2:**

لنأخذ النسق الثماني القيم حيث نعوض n = 8 في (6). إذاً مجموعة قيم الصدق:

$$T_8 = \{0, 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7, 1\}$$

لنفرض أن K و L تمتلكان القيمتـين V(K)=3/7 و V(L)=2/7 عـلى الترتيـب. مـن العلاقات (1) إلى (5) وباستخدام مجموعة قيم الصدق T_8 نجد أن:

$$V(\urcorner K) = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$V(K \wedge L) = \min(3/7, 2/7) = 2/7$$

$$V(K \vee L) = \max(3/7, 2/7) = 3/7$$

$$V(K \rightarrow L) = \min(1, 1 + 2/7 - 3/7) = \min(1, 6/7) = 6/7$$

$$V(K \leftrightarrow L) = 1 - |3/7 - 2/7| = 1 - |1/7| = 6/7$$

إن سبب تبنينا للعلاقة (1) هو أنه إذا كانت K صادقة تماماً فإن $\neg$K تكون كاذبة تماماً. ومن المعقول الافتراض أنه إذا كانت K هي ¾ صادقة فإن $\neg$K تكون ¼ صادقة. وهكذا أو بشكل عام فإن:

$$V(K) + V(\neg K) = 1$$

أو أن

$$V(K) - V(\neg K) = 1$$

أما بالنسبة إلى العلاقة (2)، فإنه يبدو أن صدق الوصل يكون بقدر أقل من صدق معطوفاته.

المفصولات تكون صادقة بقدر أعلى من صدق مفصولاته. هذا ما تعكسه العلاقة (3) أعلاه.

أما فيما يخص العلاقة (4) فإنها تبدو أكثر تعقيداً. إن الفكرة العامة هي أنه: إذا كان التالي على الأقل صادقاً بقدر صدق المقدم فإن الاستلزام يكون صادقاً (يأخذ القيمة 1). أما إذا كان التالي أقل صدقاً من المقدم فإن الاستلزام لا يأخذ القيمة 1. فالصدق التام (القيمة 1) ينقص بما يساوي الفرق بين صدق التالي وصدق المقدم.

إن صدق $K \leftrightarrow L$ يكون 1 إذا كان $V(K) = V(L)$ وفي الحالات الأخرى، فإن صدق الاستلزام الثنائي يقل بما يساوي الفرق بين صدقي K و L.

من السهولة تبيان أن قانون الثالث المرفوع لا يصح في المنطق المتعدد القيم كالتالي:

$$V(K \vee \neg K) = \max (V(K), 1 - V(K))$$

وهكذا فإن $V(K \vee \neg K) = 1$ فقط عندما تكون $V(K) = 0$ أو $V(K) = 1$.

باستخدام تعريف النفي أعلاه، نستطيع برهان قيمة صدق النفي المضاعف للصيغة على أنه يساوي قيمة صدق الصيغة نفسها:

$$\begin{aligned} V(\neg\neg\alpha) &= 1 - V(\neg\alpha) \\ &= 1 - (1 - V(\alpha)) \\ &= V(\alpha) \end{aligned}$$

كذلك يمكن برهان قانون دي مورغان:

$$V(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = V(\neg(\alpha \vee \beta))$$

سنترك هذا البرهان للقارئ كتمرين.

إذا تم تمثيل قيم الصدق بواسطة الأعداد الحقيقية في المجال [0,1] وبما أن هذه المجموعة لانهائية فإذاً $T_\infty = [0,1]$، ∞ يرمز إلى (ما لانهاية). في هذه الحالة فإن المنطق المتعدد القيم يسمى المنطق اللانهائي القيم أو المنطق المتصل، ذلك أن مجموعة الأعداد الحقيقية متكاثفة، أي أنه بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد حقيقي آخر هو الوسط الحسابي للعددين (مجموع العددين مقسوم على 2). يوجد تقابل بين هذا المنطق وما سندرسه في الفصل الأخير: المجموعات المرنة، التي يؤسس عليها المنطق المرن.

4.9 جداء الأنساق في المنطق المتعدد القيم:

نستطيع الحصول على نسق منطقي متعدد القيم كنتيجة للجداء الديكارتي لنسقين آخرين كالتالي:

ليكن S1 و S2 نسقين متعددي القيم وليكن S1xS2 هو الجداء الديكارتي لهذين النسقين. ولتكن مجموعة قيم الصدق V_1 هي مجموعة قيم صدق S1 و V_2 هي مجموعة قيم صدق S2. إن مجموعة قيم صدق S1xS2 ستكون الزوج المرتب على الشكل (V_1 , V_2).

مثال: إذا اخذنا S1 على أنه النسق الثنائي القيم C2 والذي مجموعة قيم صدقه T1={1,0} وكذلك S2 هو هذا النسق نفسه، فإننا نحصل على مجموعة الأزواج المرتبة:

$$T1 \text{ x } T2 = \{1, 0\} \text{ x } \{1, 0\} = \{(1,1),(1,0),(0,1),(0,0)\}$$

والتي تمثل مجموعة قيم صدق النسق $C2xC2=C_2{}^2$ نلاحظ أننا بهذا الجداء قد حصلنا على نسق رباعي القيم، ومجموعة قيم صدقه هي مجموعة الأزواج المرتبة الأربعة أعلاه.

تستخدم أنساق الجداء، إذا أريد إيجاد قيم صدق الصيغ (تقويم الصيغ) وفق نواحٍ مستقلة عن بعضها البعض ومختلفة، ولتقديم قيم الصدق هذه بشكل مشترك.

إذا أريد حساب قيمة صدق صيغة ما في نسق الجداء، فيجب أولاً حساب قيمة صدقها في كل من النسقين المكونين لنسق الجداء. قيم الصدق في النسق الأول تصبح المركبة الأولى للزوج المرتب وقيم الصدق في النسق الثاني تكون المركبة الثانية.

جدول صدق الروابط $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ يعين بواسطة القاعدتين التاليتين:

$\neg(v_1, v_2) = (\neg v_1, \neg v_2)$ (1)

$(v_1, v_2) * (v'_1, v'_2) = (v_1 * v'_1, v_2 * v'_2)$ (2)

حيث * تمثل أي رابط ثنائي.

جداول صدق الروابط الثنائية بالنسبة للنسق الرباعي أعلاه تكون كما يلي أدناه (نكتب 1 عوضا عن (1,1)، 2 عوضاً عن (1,0)، 3 عوضاً عن (0,1)، 4 عوضاً عن (0,0)).

K	$\neg$K
1	4
2	3
3	2
4	1

	K $\wedge$ L				K $\vee$ L				K $\rightarrow$ L				K $\leftrightarrow$ L			
L / K	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	1	2	3	4	1	1	1	1	1	2	3	4	1	2	3	4
2	2	2	4	4	1	2	1	2	1	1	3	3	2	1	4	3
3	3	4	3	4	1	1	3	3	1	2	1	2	3	4	1	2
4	4	4	4	4	1	2	3	4	1	1	1	1	4	3	2	1

5.9 تمارين:

(أ)

أنشئ جدول صدق كل من الصيغ التالية وحدد فيما إذا كانت كل منها تكرارية أم لا في كل من دلالة بوشفار وكلين ولوكاتشفيتج.

$K \vee \neg K$ (1)

$\neg(K \wedge \neg K)$ (2)

$K \vee \neg K \vee \neg\neg K$ (3)

$(K \wedge L) \rightarrow K$ (4)

$(K \vee L) \rightarrow L$ (5)

$(K \rightarrow L) \rightarrow (\neg L \rightarrow \neg K)$ (6)

$(K \leftrightarrow L) \rightarrow (L \rightarrow K)$ (7)

$\neg(K \wedge L) \leftrightarrow (\neg K \vee \neg K)$ (8)

(ب)

باستخدام جداول الصدق، حدد فيما إذا كانت كل من قواعد الاشتقاق التالية صحيحة أم خاطئة في كل من الدلالات الثلاث:

(1) الوضع

(2) نفي التالي

(3) قياس الفصل

(4) الجمع

(5) القياس الشرطي

(6)عكس النقيض

(7) العطف

(8) الاستيراد والتصدير

(9) تبديل الوصل

(10) تبديل الفصل

(11) تجميع الوصل

(12) تجميع الفصل

(13) توزيع الوصل على الفصل

(14) توزيع الفصل على الوصل

(15) تحصيل الحاصل

(16) الاستلزام الثنائي

(ج)

باستخدام جداول الصدق، حدد فيما إذا كانت صور الحجج التالية صحيحة أم خاطئة في كل من الدلالات الثلاث (نستخدم طريقة المثال المضاد، والتي تصبح هنا عبارة عن تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية بحيث تكون جميع المقدمات صادقة والنتيجة غير صادقة):

(1) المقدمات $\neg(K \wedge L)$ ، النتيجة $\neg K \vee \neg L$

(2) المقدمات $K \to L, K$، النتيجة L

(3) المقدمات $K \to L, \neg L$، النتيجة $\neg K$

(4) المقدمات $K \vee L, \neg K$، النتيجة L

(5) المقدمات $K \leftrightarrow L$، النتيجة $L \to K$

(6) المقدمات $K \to L$، النتيجة $\neg K \vee L$

(7) المقدمات $K \wedge \neg K$، النتيجة L

(د)

باستخدام تعاريف قيم: النفي، الوصف، الفصل الواردة في هذا الفصل، برهن أن:

$$V(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = V(\neg(\alpha \vee \beta))$$

(هـ)

برهن أن $\alpha \to \alpha$ تكرارية لكل α، باستخدام تعريف قيمة الاستلزام الواردة في هذا الفصل.

الفصل العاشر

المنطق المرن

Fuzzy Logic

لنأخذ المفارقة المعروفة بمفارقة الكومة[56]:

حبة واحدة من الرمل ليست كومة.

إضافة حبة واحدة من الرمل إلى ما هو ليس كومة لا تجعله كومة.

إذاً، لا توجد كومات رمل.

المقدمتان تبدوان معقولتين، ولكن من الواضح أن النتيجة كاذبة. فأين الخطأ؟.

المنطق التقليدي (ثنائي القيم) يضع حدوداً قاطعة بين ما هو كومة وما ليس كومة، فبأخذ أي مقدار من الرمل x فإن القضية (x هو كومة) تكون صادقة أو كاذبة. وهكذا فحسب هذا المنطق، فإن المقدمة الثانية من الحجة أعلاه كاذبة، ذلك أنه في لحظة (نقطة) ما فإن إضافة حبة واحدة من الرمل تحوِّل ما هو ليس كومة إلى كومة. وقد يكون من الصعب علينا أن نحدد بدقة تلك النقطة.

المنطق ثلاثي القيم الذي مر بنا، يسمح لنا بالقول إن مقداراً ما يكوّن كومة وآخر لا يكون كومة ومقداراً ثالثاً يكون بين ما هو كومة وما هو ليس كومة. إن مفهوم (الكومة) هو مفهوم غامض[57]، ذلك أنه بالنسبة إلى مقادير ما لا نستطيع القول بصدق ولا بكذب كونها كومة. وسنستطيع القول إنها ضرب من الكومات. وعلى هذا الأساس فإن المقدمة الثانية ليست كاذبة ولكنها ليست صادقة أيضاً. ففي لحظة معينة، فإن إضافة حبة تنقلنا من شيء ليس كومة تماماً

56- sorites paradox.

57- vague.

إلى شيء هو ضرب من الكومة. وفي لحظة أخرى تنقلنا هذه الإضافة من شيء هو ضرب من الكومة إلى شيء هو كومة تماماً. أي أنه توجد حدود واضحة بين ما هو ضرب من الكومات والكومات.

إن العديد من الفلاسفة لا يعتقدون فقط بأن مفهوم الكومة غامض (أي عدم وجود حدود قاطعة بين ما هو كومة وما هو ليس كومة) وإنما يعتقدون بعدم وجود حدود قاطعة بين الكومة وضرب من الكومة أو بين ضرب من الكومة وما ليس بكومة. ففي لحظة ما يصبح ما هو، بوضوح، ليس كومة كبيراً كفاية، بحيث لا نستطيع أن نؤكد فيما إذا كنا نسميه كومة أو ليس كومة.

لقد بقيت مفارقة الكومة لأمد طويل ينظر إليها بغرابة. ولكن الفلاسفة المعاصرين ينظرون إليها كشيء اعتيادي. فمعظم المحمولات التي تصف العالم هي غامضة، فالأسماء مثل: جبل، تل، والصفات مثل: أنيق، ذكي، قصير، والأفعال مثل: يبتسم، يغضب، والظروف مثل: بوضوح، بقوة، لا توجد نقطة محددة يصبح التل عندها جبلاً والجدول نهراً. ويمكننا تصور سلسلة من الظلال اللونية بين الأحمر والبرتقالي. إن الألوان والارتفاعات مرتبة بشكل متصل، حيث تكون الحدود غامضة.

لقد ظهر المصطلح (مرن) بالمعنى الذي نستخدمه هنا لأول مرة عام 1965 في مقال للعالم الأمريكي لطفي زادة (الإيراني الأصل)، والذي يعتبر مؤسس المنطق المرن كتعميم لا نهائي متصل بمنطق لوكاتشيفيج الثلاثي القيم، حيث يمكن أن تكون قيم صدق القضايا أي عدد حقيقي بين 0 و1. يمكننا تصور قيم الصدق هذه كدرجات صدق. فالقضية التي قيمة صدقها 0 تكون كاذبة تماماً، أما التي قيمة صدقها 0.2 فهي خمس صادقة.

1.10 المجموعات المرنة **Fuzzy Sets**:

نظرية المجموعات المرنة تتعامل مع المجموعة الجزئية A للمجموعة الكلية (الشاملة) U، حيث يكون الانتقال من الانتماء التام للمجموعة A إلى عدم الانتماء إليها بشكل تدريجي وليس منقطعاً (نقصد بالمنقطع وجود القيمة 1 ثم مباشرة القيمة 0). المجموعات الجزئية المرنة لا تمتلك حدوداً حاسمة.

مثال: لتكن المجموعة A هي مجموعة الشوارع الطويلة في مدينة ما. لنرمز بواسطة U لمجموعة الشوارع، رمزياً نكتب:

U = {x يكون شارع: x}

ماذا عن عناصر مجموعة الشوارع الطويلة؟. قبل كل شيء، هل هي مجموعة بالمعنى العادي؟ ثم كم هو طول (الشوارع الطويلة)؟. هل الشارع الذي طوله 1 كم يكون شارعاً طويلاً؟، إذا كان الجواب بنعم، فهل يوجد أي فرق بين الشارع الذي طوله ¾ كم وبين الشارع الذي طوله 1 كم؟. الحقيقة، أننا لا نعرف كيف نجيب عن هذه الأسئلة، وذلك لأن (مجموعة الشوارع الطويلة) لا تؤلف مجموعة بالمعنى العادي. إن معظم مجموعات الأشياء التي نصادفها في العالم الواقعي هي مجموعات مرنة وليست محددة بشكل قاطع (حاسم). هذه المجموعات لا تمتلك معياراً معرفاً بدقة للانتماء لها. في مثل هذه المجموعات، ليس من الضروري بالنسبة إلى شيء ما أن ينتمي أو لا ينتمي إلى المجموعة، لوجود درجات (وسطية) من الانتماء. هذا هو مفهوم المجموعات المرنة. إنها مجموعة تملك صفة الاستمرار في درجات الانتماء.

نظرية المجموعات المرنة هي تعميم لنظرية المجموعات العادية المعروفة لكل دارس. أي أن كل ما هو موجود في هذه الأخيرة يظهر كحالة خاصة في الأولى. وبسبب هذه الخاصية العمومية، فإن لنظرية المجموعات المرنة قابلية أكثر على التطبيق بالمقارنة مع نظرية المجموعات العادية. المجموعة المرنة هي المجموعة التي تسمح بوجود (الانتماء الجزئي) لها.

2.10 دالة الانتماء وتعريف المجموعة المرنة The Membership Function and definition of fuzzy set:

إن تحديد انتماء أو عدم انتماء عناصر إلى مجموعة عادية A ($A \subset U$) يمكن أن يتم بواسطة دالة الانتماء $\mu_A(x)$، التي تأخذ القيمتين 0 و1 فقط، واللتين تؤشران فيما إذا كانت العناصر تنتمي أو لا تنتمي إلى A. نستطيع كتابة دالة الانتماء هذه $\mu_A(x)$ كما يلي:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت } x \in A \\ 0 & \text{إذا كانت } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

وإذاً تكون $\mu_A(x) = \{0,\ 1\}$ وعلى هذا الأساس يبنى المنطق التقليدي لأن التعبير عن الانتماء هنا ينحصر في 1 (للصدق) و 0 (للكذب).

الآن لنفرض أن دالة الانتماء $\mu_A(x)$ تأخذ قيماً من المجال المغلق $[0,\ 1]$. في هذه الحالة لا يكون مفهوم الانتماء عادياً (1 أو 0)، وإنما يصبح هذا المفهوم (مرناً) أي أنه يمثل انتماءً جزئياً أو نقول بتمثيله لدرجات انتماء، أي أنه دالة انتماء تأخذ قيمها بين 0 و1 بالإضافة إلى القيمتين 0 و 1.

لنأخذ المجموعة العادية A والمجموعة الشاملة U. المجموعة المرنة *A* تعرف بواسطة مجموعة الأزواج المرتبة:

$$\mathit{A}=\{(x,\ \mu_A(x)):\ x \in A,\ \mu_A(x) \in [0,1]\} \quad (2)$$

حيث $\mu_A(x)$ هو دالة تسمى دالة الانتماء التي تعين درجة انتماء كل عنصر x من A إلى المجموعة المرنة *A*. التعريف (2) يربط كل عنصر من A مع عدد حقيقي $\mu_A(x)$ من المجال $[0,\ 1]$. العدد الحقيقي هذا هو درجة انتماء x إلى المجموعة *A*.

أصبح واضحاً أن المجموعة المرنة *A* هي مجموعة أزواج مرتبة. تكون المركبة الأولى x عناصر من مجموعة عادية والمركبة الثانية $\mu_A(x)$ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال [0،1]. أي أن الفرق بين المجموعات العادية والمجموعات المرنة هو أن الأولى تعرف بواسطة ذكر عناصرها أو ذكر صفتها المشتركة، أما الثانية فتعرف بواسطة ذكر كل عنصر منها مرتبطاً بعدد حقيقي $0 \leq n \leq 1$.

سوف نطابق أي مجموعة مرنة مع دالة انتمائها ونستخدم هذين المفهومين تبادلياً. وسنرمز للمجموعات المرنة بواسطة الحروف المائلة ...*A*,*B*, . أما دوال انتمائها المناظرة فسنرمز لها بواسطة ...,$\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$

مثال: لتكن A مجموعة (أصدقاء أحمد) التالية:

A = {خالد، سعد، ماجد، محمد}

A مجموعة عادية جزئية من المجموعة الشاملة U: جميع أصدقاء أحمد.

المجموعة المرنة A هنا تعبر عن مدى قرب أصدقاء أحمد منه:

A = {(خالد،0.1)، (سعد،0.5)، (ماجد،0.3)، (محمد،0.7)}

هنا يكون: μ_A (خالد) = 0.1، μ_A (سعد) = 0.5، μ_A (ماجد) = 0.3، μ_A (محمد) = 0.7.

إن الزوج (محمد،0.7) يشير إلى أن محمد هو الأكثر قرباً إلى أحمد، وذلك لأن درجة انتمائه (0.7) أكبر من بقية درجات انتماء الأسماء الأخرى. كذلك فإن (خالد،0.1) يشير إلى أن خالد هو الأقل قرباً إلى أحمد، وذلك لأن درجة انتمائه (0.1) الأصغر من بقية درجات انتماء الأسماء الأخرى.

3.10 العلاقات والعمليات الأساسية على المجموعات المرنة:

لتكن A و B مجموعتين مرنتين من المجموعة الشاملة U ومعرفتان كما يلي:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\}, \quad \mu_A(x) \in [0, 1]$$

$$B = \{(x, \mu_B(x))\}, \quad \mu_B(x) \in [0, 1]$$

يتم إدخال العلاقات والعمليات على A وB بواسطة العلاقات والعمليات على دالتي انتمائهما $\mu_A(x)$ و $\mu_B(x)$ على الترتيب.

1. علاقة التساوي:

تسمى المجموعتان المرنتان A وB متساويتين ونكتب $(A = B)$ إذا وفقط إذا كان لكل x ∈ U:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad (3)$$

أما إذا وجد x بحيث أن $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$ فإن $A \neq B$

2. علاقة التضمن:

المجموعة المرنة A تسمى مجموعة جزئية من (متضمنة في) المجموعة المرنة B ونكتب $(A \subseteq B)$ إذا كان لكل $x \in U$:

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad (4)$$

مثال:

لتكن المجموعة الشاملة U هي مجموعة أطوال الأشخاص (بالسنتيمترات) والمجموعة المرنة A هي (طويل) والمجموعة المرنة B هي (مناسب) كالتالي:

U = {130, 140, 150, 160, 170, 180, 190}

A ={(130,0),(140,0.1),(150,0.2),(160,0.4),(170,0.5),(180,1),(190,1)}

B = {(130,0), (140,0.3), (150,0.8), (160,1), (170,1), (180,1), (190,1)}

نرى أن $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ لكل $x \in U$: وإذاً A متضمنة (محتواة) في B.

إن $A = B$ تعني أن A مجموعة جزئية من B و B مجموعة جزئية من A . أي أن:

$A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ أو $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ لكل $x \in U$ و $\mu_B(x) \leq \mu_A(x)$

لكل $x \in U$ يعني $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ لكل $x \in U$.

3. عملية التكميل (المجموعة المكملة):

المجموعة المرنة $\bar{A}$ تسمى مكملة للمجموعة المرنة A إذا كان:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (5)$$

أو أن

$$\mu_A(x) + \mu_{\bar{A}}(x) = 1$$

مثال 1: لنجد المجموعة المكملة للمجموعة المرنة:

A = {(1,0.1), (2, 0.4), (3, 0.8)}

وباستخدام (5) نحصل على:

$$\mu_{\bar{A}}(1) = 1 - \mu_A(1) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$\mu_{\bar{A}}(2) = 1- \mu_A(2) = 1- 0.4 = 0.6$$

$$\mu_{\bar{A}}(3) = 1- \mu_A(3) = 1- 0.8 = 0.2$$

وإذاً المجموعة المكملة:

$$\bar{A} = \{(1, 0.9), (2, 0.6), (3, 0.2)\}$$

مثال **2**:

لتكن المجموعة الشاملة U هي مجموعة أعمار الأشخاص (بالسنين) والمجموعة المرنة A: صغير السن والمرنة B: كبير السن، كالتالي:

U = {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80}

A ={(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)}

B ={(10,0),(20,0.1),(30,0.3),(40,0.5),(50,0.7),(60,0.9),(70,1),(80,1)}

ولنجد $\bar{A}$ و $\bar{B}$ كما يلي:

$\bar{A}$ = {(10,0),(20,0.2),(30,0.4),(40,0.8),(50,0.9),(60,1),(70,1),(80,1)}

$\bar{B}$ = {(10,1),(20,0.9),(30,0.7),(40,0.5),(50,0.3),(60,0.1),(70,0),(80,0)}

4. عملية التقاطع:

تقاطع المجموعتين المرنتين A وB تكتب $(A \cap B)$ ودالة انتمائه $\mu_{A \cap B}(x)$ تعرَّف كما يلي:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in U \qquad (6)$$

مثال:

لنجد $A \cap B$ حسب المثال الأخير. المجموعة المرنة صغير السن وكبير السن هي:

$A \cap B$ ={(10,0),(20,0.1),(30,0.3),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)}

نرى أن الانتماء إلى المجموعة (صغير السن وكبير السن) تعني بشكل خاص الأشخاص الذين يبلغون الثلاثين من العمر.

5. عملية الاتحاد:

اتحاد المجموعتين A وB تكتب $(A \cup B)$ ودالـة انتمائـه $\mu_{A\cup B}(x)$ تعـرف كـما يلي:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in U \qquad (7)$$

مثال:

المجموعة المرنة $A \cup B$ حسب المثال السابق هي:

$$A \cup B = \{(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.5),(50,0.7),(60,0.9),(70,1),(80,1)\}$$

نلاحظ أنه حتى أربعين سنة تكون درجة الانتماء من صنف صغير السن واعتباراً من أربعين سنة تكون من صنف كبير السن.

نرى مما ذكر أعلاه أن:

$$A \cup \bar{A} = \{(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.8),(50,0.9),(60,1),(70,1),(80,1)\}$$

$$A \cap \bar{A} = \{(10,0),(20,0.2),(30,0.4),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)\}$$

أي أن $\mu_{A \cup \bar{A}}(x) \neq \mu_U(x) = 1$ أو $U \neq A \cup \bar{A}$

كذلك فإن $\mu_{A \cap \bar{A}}(x) \neq \mu_\Phi(x) = 0$ أو $\Phi \neq A \cap \bar{A}$

يتبين أن قانون (الثالـث المرفـوع) وكـذلك مبـدأ عـدم التنـاقض لا يـصحان بالنـسبة إلى المجموعات المرنة. أما في نظرية المجموعات العادية فإن كل عنـصر يمتلـك أو لا يمتلـك خاصـية معينة ونعبر عن ذلك بواسطة 1 أو 0. في عالمنا الواقعي توجد عناصر تمتلك الصفة بدرجات بين 0 و1 أي أنه توجد ظلال رماديـة كثـيرة بـين الأبـيض والأسـود. إن عـدم وجـود قـانون (الثالـث المرفوع) بالنسبة للمجموعات المرنة يجعلها أكـثر عموميـة مـن المجموعـات العاديـة، ويجعلهـا مناسبة جداً لوصف الغموض (عدم الدقة) في العالم الواقعي ولوصف العمليات على المعلومات غير التامة وغـير الواضـحة. يقـول كانـدل[58]: (إن الفكـرة المركزيـة لفلـسفة أفلاطـون تكمـن في وجـود عنـاصر غـير دقيقـة في العـالم الـواقعي. إن المفـاهيم الدقيقـة تقابـل ذلـك النـوع مـن

58-Kandel, a.- fuzzy mathematical techniques and applications, addison-wesley, 1980.

الأشياء المستخدمة في الرياضيات البحتة بينما (البناءات غير الدقيقة) هي الغالبة في الحياة الواقعية. نحن نعتقد أن البناءات غير الدقيقة غنية بما يكفي من العمليات والخواص الرياضية لتصبح أداة حقيقية من أجل بناء أنواع جديدة من الحالات. بالإضافة إلى ذلك فإن الخواص الرياضية هذه تجهزنا بمؤشر عملي عند القيام بالاستدلالات الفلسفية والتقنية معاً).

6. عملية الفرق:

فرق المجموعتين A وB نكتب $(A-B)$ ودالة انتمائه $\mu_{A-B}(x)$ تعرف كما يلي:

$$\mu_{A-B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_{\bar{B}}(x)), x \in U \qquad (8)$$

مثال:

لنجد $A-B$ و $B-A$ حسب المثال السابق كما يلي:

$A - B$ ={(10,1),(20,0.8),(30,0.6),(40,0.2),(50,0.1),(60,0),(70,0),(80,0)}

$B - A$ ={(10,0),(20,0.1),(30,0.3),(40,0.5),(50,0.7),(60,0.9),(70,1),(80,1)}

نرى أن $B - A \neq A - B$ بشكل عام.

باستخدام (6) يمكن كتابة (8) هكذا:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap\bar{B}}(x)$$

كذلك من التعريف (8) وباستخدام (6) نحصل على:

$$\mu_{B-A}(x) = \min(\mu_B(x), \mu_{\bar{A}}(x)) = \mu_{\bar{A}\cap B}(x) \qquad (9)$$

من المهم ملاحظة أن عمليات: التكميل (5)، التقاطع (6)، الاتحاد (7) على المجموعات المرنة تقابل على الترتيب، النفي، الوصل، الفصل في المنطق اللانهائي القيمة.

7. عملية الجداء الديكارتي:

سندخل عمليتين للجداء الديكارتي للمجموعتين المرنتين A(x) و B(y):

$$A(x) = \{(x, \mu_A(x)), \mu_A(x) \in [0, 1], x \in A \subset U_1\}$$

$$B(y) = \{(y, \mu_B(y)), \mu_B(y) \in [0, 1], y \in A \subset U_2\}$$

1. الجداء الديكارتي الأصغر:

نعرِّف هذا الجداء الذي نكتبه $B \boxtimes A$ كما يلي:

$$A \boxtimes B = \{(x,y), \min (\mu_A(x)), \mu_B(y)), (x,y) \in A \times B\}$$

وهذا يعني القيام بالجداء الديكارتي العادي $A \times B$ ونربط مع كل زوج (x,y) قيمة انتماء هي الأصغر بين $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$.

2. الجداء الديكارتي الأعلى:

نعرف هذا الجداء الذي نكتبه $B \boxtimes A$ كما يلي:

$$A \boxtimes B = \{(x,y), \max (\mu_A(x)), \mu_B(y)), (x,y) \in A \times B\}$$

هنا قيمة انتماء كل زوج (x,y) هي القيمة الأعلى بين $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$.

مثال:

لنأخذ المجموعتين المرنتين:

$A = \{(x_1, 0), (x_2, 0.1), (x_3, 1)\}$

$B = \{(y_1, 0.3), (y_2, 1), (y_3, 0.2), (y_4, 0.1)\}$

الجدولان التاليان يمثلان الجداء الديكارتي الأصغر والأعلى:

	y / x	y1	y2	y3	y4
$A \boxtimes B \equiv$	x1	0	0	0	0
	x2	0.1	0.1	0.1	0.1
	x3	0.3	1	0.2	0.1

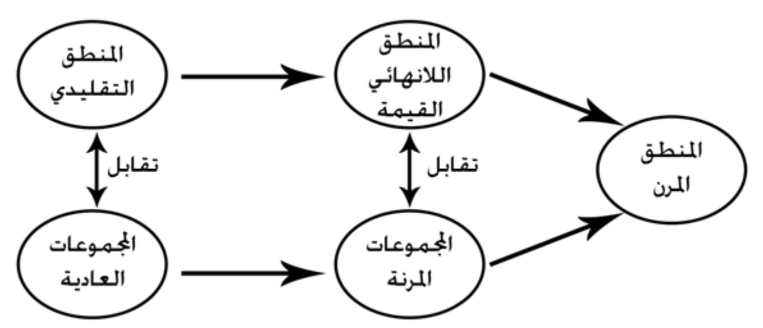
	y / x	y1	y2	y3	y4
$A \boxtimes B \equiv$	x1	0.3	1	0.2	0.1
	x2	0.3	1	0.2	0.1
	x3	1	1	1	1

4.10 موضوع المنطق المرن:

المنطق المرن يمثل توسيعاً للمنطق اللانهائي القيم، وهذا الأخير بدوره يمثل تعميماً للمنطق التقليدي (الثنائي القيم). وبالمقابل تمثل نظرية المجموعات المرنة التي هي أداة المنطق المرن تعميماً لنظرية المجموعات العادية.

الموضوعات الرئيسة للمنطق المرن هي: المتغيرات اللغوية، المحوِّرات اللغوية، قواعد الاشتقاق، الاستدلال المرن. إن المنطق المرن يركز على المتغيرات اللغوية في اللغة العادية، ويهدف إلى وضع أسس الاستدلال المرن للقضايا غير الدقيقة.

المخطط أدناه يبين نشوء المنطق المرن من المنطق اللانهائي القيمة ومن المجموعات المرنة، وهذان الأخيران ينشأآن من المنطق التقليدي والمجموعات العادية على الترتيب.



المتغيرات اللغوية هي المتغيرات التي تكون قيمها هي الكلمات أو القضايا في اللغة العادية أو في اللغات الصناعية.

مثال: لنأخذ الكلمة: (العمر) من اللغة العادية وباستخدام المجموعات المرنة يمكننا إعطاء وصف تقريبي لها. (العمر) هو متغير لغوي قيمه لغوية وليست عددية وهي المجموعات المرنة، مثلاً: شاب، ليس شاباً، شاب جداً، منتصف العمر، عجوز، عجوز جداً، ليس شاباً جداً، وليس عجوزاً جداً ...إلخ. وهذه المجموعات تعرف بواسطة دالة انتماء.

5.10 المحوِّرات اللغوية **Linguistic Modifiers**:

لتكن $x \in U$ و A مجموعة مرنة معرفة بواسطة دالة الانتماء $\mu_A(x)$. نرمز بواسطة m للمحوِّر اللغوي. الكلمات التالية تمثل أمثلة على المحورات اللغوية: ليس، جداً، باعتدال. الرمز mA يعني مجموعة مرنة محوَّرة بواسطة المحور m والتي دالة انتمائها $\mu_{mA}(x)$.

تعريف كل من المحورات: ليس، جداً، باعتدال يكون حسب العلاقات التالية:

ليس:

$$\mu_{\text{ليس}\, A}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (1)$$

جداً:

$$\mu_{\text{جداً}\, A}(x) = (\mu_A(x))^2 \qquad (2)$$

باعتدال:

$$\mu_{\text{باعتدال}\, A}(x) = (\mu_A(x))^{1/2} \qquad (3)$$

مثال: لنأخذ المجموعة المرنة A التي تصف سرعة سيارة x (كم/سا) بواسطة المتغير اللغوي (سريع) المعرف كما يلي:

A={(0,0), (20,0.02), (40,0.08), (60,0.2), (80,0.5), (100,0.8), (120,0.9), (140,1)}

المجموعة الكلية:

U = {0, 20, 40, 60, 80, 100, 120}

المتغير اللغوي (سريع) يمكن تحويره ليصبح: ليس سريعاً، سريع جداً، سريع باعتدال. سنجد أولاً (ليس سريعاً):

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(x) = 1 - \mu_{\text{سريع}}(x)$$

باستخدام قيم $\mu_{\text{سريع}}(x)$ نجد أن:

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(0) = 1 - \mu_{\text{سريع}}(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(20) = 1 - \mu_{\text{سريع}}(20) = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(40) = 1 - \mu_{\text{سريع}}(40) = 1 - 0.08 = 0.92$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(60) = 1 - \mu_{\text{سريع}}(60) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(80) = 1- \mu_{\text{سريع}}(80) = 1- 0.5 = 0.5$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(100) = 1- \mu_{\text{سريع}}(100) = 1- 0.8 = 0.2$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(120) = 1- \mu_{\text{سريع}}(120) = 1- 0.9 = 0.1$$

$$\mu_{\text{ليس سريع}}(140) = 1- \mu_{\text{سريع}}(140) = 1- 1 = 0$$

إذاً المجموعة المرنة (ليس سريعاً) *B* يكون كما يلي:

B={(0,1), (20,0.98), (40,0.92), (60,0.8), (80,0.5), (100,0.2), (120,0.1), (140,0)}

بشكل مشابه نجد المجموعة المرنة (سريع جداً) *C* كما هو مبين أدناه.

$$\mu_{\text{سريع جداً}}(x) = (\mu_{\text{سريع}}(x))^2$$

C={(0,0), (20,0.0004, (40,0.0064), (60,0.04), (80,0.25), (100,0.64), (120,0.81), (140,1)}

المجموعة المرنة *D*:

$$\mu_{\text{سريع باعتدال}}(x) = (\mu_{\text{سريع}}(x))^{1/2}$$

D={(0,0), (20,0.414), (40,0.283), (60,0.447), (80,0.707), (100,0.894), (120,0.949), (140,1)}

6.10 الصدق **Truth**:

إن المتغير اللغوي الأهم هو (الصدق)، ويتم تعريفه بواسطة مجموعة مرنة دالة انتمائها $\mu_{\text{صادق}}(x)$ حيث $\mu \in [0, 1]$. سنستخدم كلمة (صادق) عوضاً عن (الصدق). مفهوم (كاذب) نعرفه على أنه (ليس صادقاً). تعريف (صادق) نعطيه كما يأتي:

$$\text{صادق} = \{(x, \mu_{\text{صادق}}(x)) : x \in [0,1],\ \mu_{\text{صادق}}(x) = x, \mu \in [0,1]\}$$

بتطبيق المحورات في (1)، (2)، (3) في الفقرة السابقة على $\mu_{\text{صادق}}(x)$ نحصل على:

$$\mu_{\text{ليس صادق}}(x) = 1- \mu_{\text{صادق}}(x)$$

$$\mu_{\text{صادق جداً}}(x) = (\mu_{\text{صادق}}(x))^2 = x^2$$

$$\mu_{\text{صادق باعتدال}}(x) = (\mu_{\text{صادق}}(x))^{1/2} = x^{1/2}$$

يمكن إيجاد المتغيرات اللغوية: صادق جداً جداً، كاذب جداً جداً كما يلي:

$$\mu_{\text{صادق جداً جداً}}(x) = (\mu_{\text{صادق جداً}}(x))^2 = x^4$$

$$\mu_{\text{كاذب جداً جداً}}(x) = (\mu_{\text{كاذب جداً}}(x))^2 = (1-x)^4$$

7.10 القضايا المركبة:

تتكون قضايا مركبة من قضيتين ذريتين P وQ مربوطتين بواسطة روابط كالتالي:

القضيتان:

P: x تكون A
Q: y تكون B (1)

حيث A وB هما المجموعتان المرنتان:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in A \subset U_1\} \quad B = \{(y, \mu_B(y)): y \in B \subset U_2\}$$

إن درجات الانتماء $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$ تمثل قيم صدق القضيتين في (1)، وبالعكس فإن قيم صدق (1) يعبر عنها بواسطة دالتي الانتماء $\mu_A(x)$ و $\mu_B(y)$.

وكمثال على P: المسافة قصيرة جداً. في هذا المثال المتغير اللغوي x هو المسافة وقصيرة جداً هي المجموعة المرنة المحورة A .

1. الوصل: **P Λ Q**

قيم صدق P Λ Q تعرّف كالتالي:

$$V(P \wedge Q) = \mu_{A \boxtimes B}(x,y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)), (x,y) \in A \times B \quad (2)$$

2. الفصل: **P V Q**

قيم صدق P V Q تعرف كما يلي:

$$V(P \vee Q) = \mu_{A \boxtimes B}(x,y) = \max(\mu_A(x), \mu_B(y)), (x,y) \in A \times B \qquad (3)$$

3. **الاستلزام: $P \rightarrow Q$**

قيم صدق $P \rightarrow Q$ تعرف كالآتي:

$$V(P \rightarrow Q) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)), (x,y) \in A \times B \qquad (4)$$

العلاقــات (2) و(3) و(4) تعــود في الأصــل للعلاقــات المقابلــة لهــا في منطــق لوكاتشيفيج المتعدد القيم.

مثال:

لنأخذ القضيتين P و Q كما يلي:

P: x سريع

Q: x خطر

حيث:

$$A = B = U1 = U2 = \{0,20,40,60,80,100,120,140\}$$

$$\mu_{\text{سريع}}(x) = \{0, 0.02, 0.08, 0.2, 0.5, 0.8 0.9, 1\}$$

$$\mu_{\text{خطر}}(y) = \{0, 0.04, 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1, 1\}$$

1. قيمة صـدق الوصـل $P \wedge Q$، أي قـيم صـدق: x سريـع و x خطـر نعرضـها في الجدول التالي:

	y / X	B: 0	20	40	60	80	100	120	140
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	20	0	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
A	40	0	0.04	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
	60	0	0.04	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
	80	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.5	0.5	0.5
	100	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	0.8	0.8
	120	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	0.9	0.9
	140	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1

الأزواج المرتبة (x_i,y_j)، حيث $x_i \in A$ و $y_j \in B$ في الجـداء الـديكارتي $B \times A$ وقمنـا بكتابـة القيمـة الأصـغر مـن $\mu_A(x_i)$ و$\mu_B(y_j)$ إلى (x_i,y_j). لنحـسب،

مثلاً قيم السطر الثالث في الجدول أعلاه حيث x = 40 و y يأخذ قيمة من B:

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 > \mu_{\text{خطر}}(0) = 0,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,0) = 0$

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 > \mu_{\text{خطر}}(20) = 0.04,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,20) = 0.04$

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 < \mu_{\text{خطر}}(40) = 0.1,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,40), = 0.08$

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 < \mu_{\text{خطر}}(60) = 0.2,\ (40,60)\ \mu_{A \boxtimes B} = 0.08$

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 < \mu_{\text{خطر}}(80) = 0.2,\ (40,80)\ \mu_{A \boxtimes B} = 0.08$

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 < \mu_{\text{خطر}}(100) = 0.8,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,100) = 0.08$

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 < \mu_{\text{خطر}}(120) = 0.9,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,120) = 0.08$

$\mu_{\text{سريع}}(40) = 0.08 > \mu_{\text{خطر}}(140) = 1,\ \mu_{A \boxtimes B}(40,140) = 0.08$

2. قيمة صدق الفصل PVQ أي قيم صدق: x سريع أو x خطر.

	X \ y (B)	0	20	40	60	80	100	120	140
	0	0.00	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1
	20	0.02	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1
A	40	0.08	0.08	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1
	60	0. 2	0. 2	0.2	0.2	0.4	0.7	1	1
	80	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.7	1	1
	100	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	1	1
	120	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1	1
	140	1	1	0.1	0.1	0.1	0.1	1	1

لقد استخدمنا لبناء الجدول تعريف $A \boxtimes B$.

3. قيم صدق الاستلزام، أي قيم صدق: إذا كان x سريعاً فإن x خطر.

في الجدول أدناه، حيث لكل زوج $(x_i,y_j) \in A \times B$ حسبنا $1-\mu_B(xi) + \mu_B(yi)$
وبعدها أخذنا هذه القيمة إذا كانت أصغر من 1، وإلا فقد أخذنا 1.

		B							
	y / X	0	20	40	60	80	100	120	140
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	20	0.98	1	1	1	1	1	1	1
A	40	0.82	0.96	1	1	1	1	1	1
	60	0. 8	0. 84	0.9	1	1	1	1	1
	80	0.5	0.54	0.6	0.7	0.9	1	1	1
	100	0.2	0.24	0.3	0.4	0.6	0.9	1	1
	120	0.1	0.14	0.2	0.3	0.5	0.8	1	1
	140	0	0.04	0.1	0.2	0.4	0.7	1	1

8.10 الاستدلال المرن **Fuzzy Reasoning**:

الاستدلال المرن يستخدم المجموعات المرنة والمنطق المرن لتوضيح الاستدلال البشري. هذا الاستدلال يفتقد إلى الدقة المتوافرة في المنطق التقليدي، ولكنه أكثر فعالية في التعامل مع الأنظمة المعقدة وغير المعرفة.

نعلم من المنطق التقليدي أن قاعدة اشتقاق الوضع تنص على أنه:

من P و $Q \rightarrow P$ تنتج Q، أي أنه إذا كانت P و $Q \rightarrow P$ صادقتين فإن Q تكون صادقة أيضاً. تخطيطياً تكتب هكذا:

المقدمة 1:	P
المقدمة2:	$P \rightarrow Q$
النتيجة:	Q

يمكن كتابة قاعدة الوضع أعلاه بشكل تفصيلي هكذا:

المقدمة1:	x تكوّن A
المقدمة2:	إذا كانت x تكوّن A، فإن y تكوّن B
النتيجة:	y تكون B

هنا P: x تكوّن A ، Q: y تكوّن B، حيث A وB مجموعتان عاديتان.

9.10 قاعدة الوضع المعممة:

المنطق المرن يرفض قاعدة الوضع أعلاه، وهو بذلك يعطي حلاً لمفارقة الكومة التي ذكرناها.

قاعدة الوضع المعممة في المنطق المرن توضع على الشكل التالي:

المقدمة 1:	P'
المقدمة 2:	P⟶Q
النتيجة:	Q'

أو على الشكل

المقدمة1:	x تكوّن A'
المقدمة2:	إذا كانت x تكوّن A، فإن y تكوّن B
النتيجة:	y تكوّن B'

هنا P': x تكون A' ، P: x تكون A ، Q: y تكون B، Q': y تكون B' ، معرفة بواسطة المجموعات المرنة A'، A، B، B' والتي تمثل مفاهيم مرنة.

المجموعتان A وA' متقاربتان ولكنهما ليستا متساويتين والشيء نفسه ينطبق على تالي المقدمة الثانية B والنتيجة B'.

مثال:

المقدمة1:	هذه السيارة أكثر سرعة قليلاً.
المقدمة2:	إذا كانت السيارة سريعة فإن السيارة تكون خطرة.
النتيجة:	هذه السيارة أكثر خطورة قليلاً.

في هذا المثال لدينا

$A=\{(x, \mu_{\text{سريعة}}(x))\}$

x تكون A: السيارة تكون سريعة

$A' = \{(x, \mu_{\text{أ سرعة ق}}(x))\}$

x تكون A': السيارة تكون أكثر سرعة قليلاً

$B = \{(x, \mu_{\text{خطرة}}(y))\}$

y تكون B: السيارة خطرة

$B' = \{(x, \mu_{\text{أ خطورة ق}}(y))\}$

y تكون B': السيارة أكثر خطورة قليلاً

10.10 تمارين:

(أ) جد المجموعة المكملة للمجموعة المرنة:

$A = \{(4,1), (5, 0.7), (6, 0.5)\}$

(ب) لتكن A,B مجموعتين مرنتين كالتالي:

$A = \{(x_1,0.1), (x_2, 0.6), (x_3, 0.7)\}$

$B = \{(x_1,0.9), (x_2, 1), (x3, 0.1)\}$

احسب:

(1) $\overline{A}, \overline{B}$ (4) $A \cap \overline{A}$

(2) $A \cup B$ (5) $\overline{A} \cup \overline{B}$

(3) $A \cap B$ (6) $\overline{A \cap B}$

(ج) برهن كلاً مما يأتي بالنسبة إلى المجموعتين A,B في التمرين (2).

(1) $A \cup A = A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

(3) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

(د) لتكن B مجموعة مرنة تصف سرعة سيارة بواسطة المتغير اللغوي (خطير):

$B=\{(0,0),(20,0.04),(40,0.1),(80,0.4), (100,0.7), (120,1), (140,1)\}$

باستخدام المحوِّرات اللغوية: ليس، جـداً، باعتـدال، المعرفـة في العلاقـات (1)، (2)، (3) في الفقرة (5.10)، جد

$\mu_{\text{ليس خطيراً}}(y)$ $\mu_{\text{خطيراً جداً}}(y)$ $\mu_{\text{خطير باعتدال}}(y)$

(هـ) ليكن المتغير اللغوي (ذكي) معرفاً بواسطة المجموعة المنتهية

ذكي = $\{(0.5, 0.2), (0.6, 0.4), (0.7, 0.8), (0.8, 0.9), (0.9, 1), (1,1)\}$

باستخدام المحوِّرات اللغوية: ليس، جـداً، باعتـدال، المعرفـة في العلاقـات (1)، (2)، (3) في الفقرة (5.10)، احسب

(1) $\mu_{\text{ليس ذكياً}}(x)$

(2) $\mu_{\text{ذكي جداً}}(x)$

(3) $\mu_{\text{ذكي باعتدال}}(x)$

(ح) ليكن المتغير اللغوي (صادق) معرفاً بواسطة المجموعة المرنة

صادق= {(0.5, 0.2), (0.6, 0.4), (0.7, 0.8), (0.8, 0.9), (0.9, 1), (1,1)}

باستخدام المحوِّرات اللغوية: ليس، جداً، باعتدال، المعرفة في العلاقات (1)، (2)، (3) في الفقرة (5.10)، احسب:

(1) كاذب.

(2) صادق جداً.

(3) صادق باعتدال.

(4) صادق جداً جداً.

(5) ليس كاذباً.

(6) كاذب باعتدال.

(7) كاذب جداً.

(ط) خذ القضيتين الذريتين P و Q المعرفتين كالتالي:

P: x تكون A = الجهد يكون قليلاً.

Q: x تكون B = السرعة تكون قليلة.

المتعلقتين بالجهد والسرعة النهائيتين لمحرك كهربائي والمعرفتين بواسطة دالة الانتماء كما يلي:

x	100	150	200	250	300
$\mu_A(x)$	1	0.8	0.5	0.2	0.1

y	1600	1800	2000	2200	2400
$\mu_B(y)$	1	0.9	0.7	0.3	0

جد:

1. $V(P \wedge Q)$

2. $V(P \vee Q)$

3. $V(P \rightarrow Q)$

حلول التمارين

6.1 الفصل الأول:

(أ)

ليكن

تهب الرياح: P

(1) $M \neg P \wedge \neg L \neg P$

(2) $MP \rightarrow LMP$

(3) $MLP \rightarrow LP$

(**4**) الترجمة:

لتكن K: الأشياء تحدث $\neg M \neg K \rightarrow \neg M \neg K$

(**5**) الترجمة:

لتكن K: الأشياء تحدث $\neg M \neg K \rightarrow LK$

(**6**) الترجمة:

لتكن K: الأشياء تحدث $(MK \vee M \neg P) \rightarrow \neg LK$

(ب)

(1) صحة $LLP \rightarrow LP$ في w_1:

$V(LP, w_1) = 0$ لأن $V(P, w_2) = 0$ و $w_1 R w_2$، وهكذا ينتج أن

$V(LP \rightarrow LLP, w_1) = 1$.

صحة $LLP \rightarrow LP$ في w_2:

$V(LP, w_2) = 1$ لأن $V(LP, w_1) = 1$، كذلك فإن $V(LLP, w_2) = 0$، لأن $V(LP, w_1) = 0$ و $w_2 R w_1$، وهكذا ينتج أن $V(LP \rightarrow LLP, w_2) = 0$. وبما أن $V(LP \rightarrow LLP, w_2) = 0$، فإذاً $LP \rightarrow LLP$ ليست صحيحة في النموذج المعطى.

(2) صحة $\neg LP$ في w_1:

$V(\neg LP, w_1) = 1$، لأن $V(LP, w_1) = 0$.

صحة $\neg LP$ في w_2:

$V(\neg LP, w_2) = 0$، لأن $V(LP, w_2) = 1$ إذاً $\neg LP$ ليست صحيحة في النموذج المعطى.

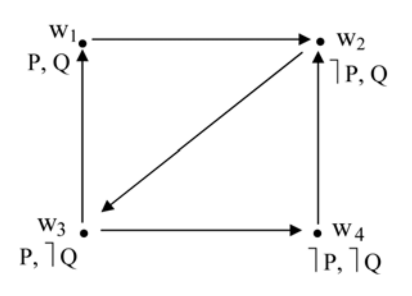
(3)

$V(MP, w_1) = 1$ لأن $V(P, w_1) = 1$ و w_1Rw_1، كذلك فإن $V(MP, w_2) = 1$، لأن $V(P, w_1) = 1$ و w_2Rw_1. إن هذا يعني أن $V(LMP, w_1) = 1$ و $V(LMP, w_2) = 1$ ومن هذا ينتج أن

$V(P \rightarrow LMP, w_1) = 1$ و $V(P \rightarrow LMP, w_2) = 1$ وإذاً $P \rightarrow LMP$ صحيحة في النموذج المعطى.

(ج)

(1) الرسم



(2)

(أ) بما أن $V(Q, w_2) = 1$ فإذاً $V(LQ, w_1) = 1$، لأن w_2 فقط موصول من w_1.

(ب) بما أن $V(\neg(P \rightarrow Q), w_3) = 1$ فإن $V(L\neg(P \rightarrow Q), w_2) = 1$ لأن w_3 فقط موصول من w_2.

(ج) بما أن $V(P, w_3) = 1$، فإن $V(LP, w_2) = 1$، لأن w_3 فقط موصول من w_2.
وهكذا يكون $V(MLP, w_1) = 1$، لأن w_1Rw_2.

(د) بما أن $V(P, w_2) = 0$، فإن $V(MP, w_1) = 1$ لأن w_2 فقط موصول من w_1.

وهكذا يكون $V(MP \wedge MQ, w_1) = 0$.

(3)

(أ) صحة MLP في w_2:

حتى يكون $V(MLP, w_2) = 1$ يجب أن يكون $V(LP, w_3) = 1$، لأن w_3 فقط موصول من w_2.

وحتى تكون $V(LP, w_3) = 1$ فيجب أن تكون $V(P, w_4) = 1$

و $V(P, w_1) = 1$ ولكننا نرى أن $P(P, w_4) = 0$.

إذاً $V(MLP, w_2) = 0$.

صحة MMLP في w_2:

حتى يكون $V(MMLP, w_2) = 1$ يجب أن يكون $V(MLP, w_3) = 1$ وحتى تكون $V(MLP, w_3) = 1$ فإن $V(LP, w_1) = 1$ أو $V(LP, w_4) = 1$، لأن w_1 و w_4 موصولان من w_3. لكننا نرى أن $V(P, w_2) = 0$ وحيث أن w_2 فقط موصول من w_1 و w_4. إذاً $V(LP, w_1) = 0$ و $V(LP, w_4) = 0$. وهكذا فإن $V(MMLP, w_2) = 0$ وبالتالي نجد أن $V(MLP \vee MMLP, w_2) = 0$.

وهكذا فالصيغة $MLP \vee MMLP$ غير صحيحة في النموذج المعطى.

4.2 الفصل الثاني:

(1)

1	$\neg(L(P\wedge Q) \leftrightarrow (LP\wedge LQ)),0$			
2	$L(P\wedge Q),0$		$\neg L(P\wedge Q),0$	
3	$\neg L(P\wedge LQ),0$		$(LP\wedge LQ),0$	
4			$LP,0$	
5	$\neg LP,0$	$\neg LQ,0$	$MQ,0$	
6	$M\neg P,0$	$M\neg Q,0$	$M\neg(P\wedge Q),0$	
7	0R1	0R2	0R3	
8	$\neg P,1$	$\neg Q,2$	$\neg(P\wedge Q),3$	
9	$(P\wedge Q),1$	$(P\wedge Q),2$	$P,3$	
10	$P,1$	$P,2$	$Q,3$	
11	$Q,1$	$Q,2$		
12	x	x	$\neg P,3$	$\neg Q,3$
13			x	x

الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

(2)

1	$\neg(L(\neg P \to P) \leftrightarrow L P)),0$		
2	$L(\neg P \to P),0$		$\neg L(\neg P \to P),0$
3	$\neg L P,0$		$LP,0$
4	$M\neg P,0$		$M\neg(\neg P \to P),0$
5	$L\neg P,0$		$\neg(\neg P \to P),2$
6	$\neg P,1$		$P,2$
7	$(\neg P \to P),1$		$\neg P,2$
8			$\neg P,2$
9	$\neg\neg P,1$	$P,1$	x
10	$P,1$	x	
11	x		

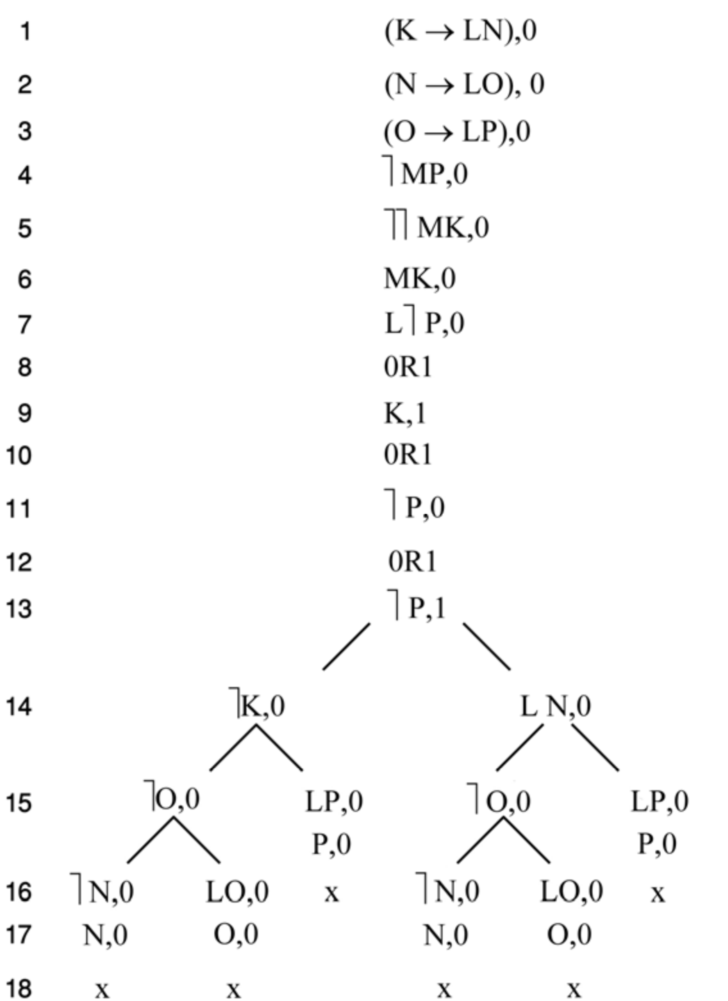
الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

(3)

1	$\neg(L(Q \to P) \wedge L(\neg Q \to P) \leftrightarrow L P)),0$			
2	$(L(Q \to P) \wedge L(\neg Q \to P),0$		$L P,0$	
3	$\neg L P,0$		$\neg(L(Q \to P) \wedge L(\neg Q \to P),0$	
4	$M\neg P,0$			
5	$\neg P,1$		$\neg L(Q \to P),0$	$\neg L(\neg Q \to P),0$
6	$(L(Q \to P),0$		$M\neg(Q \to P),0$	$M\neg(\neg Q \to P),0$
7	$L(\neg Q \to P),0$		$\neg(Q \to P),2$	$\neg(\neg Q \to P),3$
8	$(Q \to P),1$		$Q,2$	$\neg Q,3$
9	$(\neg Q \to P),1$		$\neg P,2$	$\neg P,3$
10			$P,2$	$P,3$
11	$\neg\neg P,1$	$P,1$	x	x
12	$(Q \to P),1$	x		
13	$\neg Q,1$			
14	x			

الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

(ب)



الشجرة مغلقة وصورة الحجة صحيحة.

4.3 الفصل الثالث:

مبرهنة K_7 $\quad M(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (LP \rightarrow MQ)$

البرهان

استبدال, مبرهنةK_6 $(\urcorner P/P)$ $\quad M(\urcorner P \vee Q) \leftrightarrow (M\urcorner P \vee MQ)$ .1

2. $M(\neg P \lor Q) \leftrightarrow (\neg LP \lor MQ)$ — تبادل (L-M), 1

3. $M(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (LP \rightarrow MQ)$ — تعريف$_2$, 2

مبرهنة K_8 $M(P \land Q) \rightarrow (MP \land MQ)$

البرهان

1. $(MP \land MQ) \rightarrow MP$ — قع$_3$، حق$_1$

2. $(MP \land MQ) \rightarrow MQ$ — قع$_3$، حق$_2$

3. $M(P \land Q) \rightarrow (MP \land MQ)$ — حق$_3$ 1,2

مبرهنة K_9 $L(P \lor Q) \rightarrow (LP \lor MQ)$

البرهان

1. $L(\neg Q \rightarrow P) \rightarrow (L \neg Q \rightarrow LP)$ — استبدال ,البديهية K $(\neg Q/P)$ (P/Q)

2. $L(Q \lor P) \rightarrow (\neg L \neg Q \lor LP)$ — حق$_{12}$، تعريف$_2$ 1,

3. $L(P \lor Q) \rightarrow (LP \lor MQ)$ — حق$_{16}$، تعريف$_4$ 2,

مبرهنة T_2 $M(P \rightarrow LP)$

البرهان

1. $LP \rightarrow MLP$ — استبدال (LP/P), مبرهنةT_1

2. $M(P \rightarrow LP) \leftrightarrow (LP \rightarrow MLP)$ — استبدال (LP/Q), مبرهنةK_7

3. $M(P \rightarrow LP)$ — استبدال ($M(P \rightarrow LP)/LP \rightarrow MLP$) 1,2

مبرهنة (7) S 4 $MLP \leftrightarrow MLMLP$

البرهان

1. $LM \neg P \leftrightarrow LMLM \neg P$ — استبدال $(\neg P/P)$, مبرهنة S 4(6)

2. $\neg MLP \leftrightarrow \neg MLMLP$ — تبادل (L-M) 1,

3. $MLP \leftrightarrow MLMLP$ — حق 2,

مبرهنة (7) S 5 $M(P \wedge MQ) \leftrightarrow (MP \wedge MQ)$

البرهان

.1	$L(\neg P \vee L\neg Q) \leftrightarrow (L\neg P \vee L\neg Q)$	استبدال S 5(5) مبرهنة, ($\neg$P/P), ($\neg$Q/Q)
.2	$\neg L(\neg P \vee L\neg Q) \leftrightarrow \neg(L\neg P \vee L\neg Q)$	حق,1
.3	$M\neg(\neg P \vee \neg MQ) \leftrightarrow \neg(\neg MP \vee \neg MQ)$	تبادل (L-M) ,2
.4	$M(P \wedge MQ) \leftrightarrow (MP \wedge MQ)$	$تعريف_1$,3

مبرهنة (8) S 5 $M(P \wedge LQ) \leftrightarrow (MP \wedge LQ)$

البرهان

.1	$M(P \wedge MLQ) \leftrightarrow (MP \wedge MLQ)$	استبدال (LQ/Q), مبرهنة S 5(7)
.2	$M(P \wedge LQ) \leftrightarrow (MP \wedge LQ)$	مبرهنة(3) S 5 ,1

3.4 الفصل الرابع:

(أ)

(1)

مبرهنةK_{14} $LP \rightarrow (Q \blacktriangleright P)$

1.	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$	حق
2.	$LP \rightarrow L(Q \rightarrow p)$	$قع_1$,1
3.	$LP \rightarrow (Q \blacktriangleright P)$	تعريف $\blacktriangleright$,2

(2)

مبرهنةK_{15} $L\neg P \rightarrow (P \blacktriangleright Q)$

1.	$\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$	حق
2.	$L\neg P \rightarrow L(P \rightarrow Q)$	$قع_1$,1
3.	$L\neg P \rightarrow (P \blacktriangleright Q)$	تعريف $\blacktriangleright$,2

(ب)

(1)

1	P ➤ Q,0	
2	0R1	
3	P ,0	
4	⌉Q ,0	
5	⌉P,0	Q,0
6	x	x

الخط 5 اشتق من 1 بتطبيق القاعدة ➤. الشجرة مغلقة وصورة الحجة صحيحة.

(2)

1	P ➤ Q,0	
2	0R1	
3	⌉Q ,0	
4	⌉⌉P ,0	
5	⌉P,0	Q,0
6	x	x

الخط 5 اشتق من 1 بتطبيق القاعدة ➤. الشجرة مغلقة وصورة الحجة صحيحة.

(3)

1	P ❮❯ Q,0	
2	0R1	
3	P,0	
4	⌉Q ,0	
5	P,0	⌉P,0
6	Q,0	⌉Q,0
7	x	x

الخطان 5 و6 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة ➤➤. الشجرة مغلقة وصورة الحجة صحيحة.

(4)

1	LP ➤ LQ,0	
2	L ¬Q,0	
3	0R1	
4	¬M ¬P,0	
5	¬Q ,0	
6	L¬¬P,0	
7	¬¬P,1	
8	¬LP,0	LQ,0
9	M¬P,0	Q,0
10	¬P,1	x
11	x	

الخط 5 اشتق من 2 بتطبيق القاعدة L. الخط 6 اشتق من 4 بتطبيق القاعدة ¬M. الخط 7 اشتق من 6 بتطبيق القاعدة L. الخط 8 اشتق من 1 بتطبيق القاعدة ➤. بالنسبة للفرع الأيسر: الخط 9 اشتق من 8 بتطبيق القاعدة ¬L. الخط 10 اشتق من 9 بتطبيق القاعدة M. بالنسبة للفرع الأيمن: الخط 9 اشتق من 8 بتطبيق القاعدة L. الشجرة مغلقة وصورة الحجة صحيحة.

4.5 الفصل الخامس:

(1)

1.	$\neg(\forall x)\ MPx \rightarrow M\ (\forall x)\ Px))$	0
2.	$(\forall x)\ MPx$	0
3.	$\neg M\ (\forall x)\ Px$	0
4.	$L\ \neg\forall\ (X)\ Px$	0
5.	MPx	0
6.	0R1	
7.	Pa	1
8.	$\neg(\forall x)\ Px$	1
9.	$\exists(X)\ \neg Px$	1
10.	$\neg Pb$	1
11.	MPa	0
12.	Pb	2

الخطـان 2 و 3 اشـتقا مـن 1 باسـتخدام القاعـدة $\neg\rightarrow$. الخـط 4 اشـتق مـن 3 باستخدام القاعدة $\neg M$. الخط 5 اشتق مـن 2 باسـتخدام القاعـدة تـخ.ك. الخطـان 6 و7 حصلنا عليهما من 5 باستخدام القاعدة M. الخط 8 اشـتق مـن 4 باسـتخدام القاعـدة L. الخط 9 اشتق من 8 باستخدام القاعدة $\neg\forall$. الخط 10 اشتق مـن 9 باسـتخدام القاعـدة تم.و. الخط 11 اشتق من 2 باستخدام تخ.ك. والخط 12 اشتق من 5 باسـتخدام القاعـدة M. مـن الواضـح، أن الـشجرة لا يمكـن أن تكـون مغلقـة. وإذاً، الـصيغة ليـست صـحيحة (خاطئة).

(2)

1.	$\neg(L(\forall x)Px \rightarrow (\forall x)LPx)$	0
2.	$L(\forall x)Px$	0
3.	$\neg(\forall x)LPx$	0
4.	$(\exists x)\neg LPx$	0
5.	$\neg LPx$	0
6.	$(\forall x)Px$	0
7.	Pa	1
8.	$M\neg Px$	0
9.	$0R1$	
10.	$\neg Pa$	1
11.	x	

(3)

1.	$\neg(M(\forall x)Px \rightarrow (\forall x)MPx)$	0
2.	$M(\forall x)Px$	0
3.	$\neg(\forall x)MPx$	0
4.	$0R1$	
5.	$(\forall x)Px$	1
6.	Pa	1
7.	$(\exists x)\neg MPx$	0
8.	$\neg MPa$	1
9.	$L\neg Pa$	1
10.	$\neg Pa$	1
11.	X	

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 باستخدام القاعدة $\neg\forall$. الخط 5 اشتق من 4 باستخدام القاعدة تم.و. الخط 6 اشتق من 2 باستخدام القاعدة L. الخط 7 اشتق من 6 باستخدام القاعدة تخ.ك. الخط 8 اشتق من 5 باستخدام القاعدة $\neg L$. الخط 9 و10 حصلنا عليهما من 8 باستخدام القاعدة M.

الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

(4)

1.	$\neg((a \neq b) \rightarrow L\,(a \neq b))$	0
2.	$a \neq b$	0
3.	$\neg L\,(a \neq b)$	0
4.	$M \neg (a \neq b)$	0
5.	0R1	
6.	$\neg(a \neq b)$	1
7.	$a = b$	1
8.	$a \neq a$	1
9.	x	

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\neg\rightarrow$. الخط 4 اشتق من 3 باستخدام القاعدة $\neg L$. الخطان 5 و6 حصلنا عليهما من 4 باستخدام القاعدة M. الخط 7 اشتق من 6. الخط 8 اشتق من 6 و7.

الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

(5)

1.	$\neg((a = b) \rightarrow (LPa \rightarrow LPb))$	0
2.	$a = b$	0
3.	$\neg(LPa \rightarrow LPb)$	0
4.	$\neg LPb$	0
5.	$\neg LPa$	0
6.	Pa	1
7.	$Pb \neg M$	0
8.	0R1	
9.	$\neg Pb$	1
10.	$\neg Pa$	1
11.	x	

الخطان 2 و3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\rceil\rightarrow$. الخطان 4 و5 اشتقا من 3 باستخدام القاعدة $\rightarrow\rceil$. الخط 6 اشتق من 4 باستخدام القاعدة L. الخط 7 اشتق من 5 باستخدام القاعدة $\rceil$ L. الخط 8 و9 حصلنا عليهما من 7 باستخدام القاعدة M. الخط 10 اشتق من 2 و9 باستخدام القاعدة أ س. م..

الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

(6)

1.	$\rceil((a = b) \rightarrow (Pa \rightarrow LPb))$	0
2.	$a = b$	0
3.	$\rceil(Pa \rightarrow LPb)$	0
4.	Pa	0
5.	$\rceil LPb$	0
6.	$M \rceil Pb$	1
7.	0R1	
8.	$\rceil Pb$	1
9.	$\rceil Pa$	1
10.	x	

الخطان 2 و 3 اشتقا من 1 باستخدام القاعدة $\rceil\rightarrow$. الخطان 4 و5 اشتقا من 3 باستخدام القاعدة $\rightarrow\rceil$. الخط 6 اشتق من 5 باستخدام القاعدة $\rceil$ L. الخطان 7 و8 حصلنا عليهما من 6 باستخدام القاعدة M. الخط 9 اشتق من 2 و 8 باستخدام القاعدة اس.م.

الشجرة مغلقة والصيغة صحيحة.

3.6 الفصل السادس:

(أ)

(1) $HG\alpha$: دائماً كان الحال أنه سيكون الحال دائماً أن α.

(أي أن: α هي الحال في جميع الأزمان: الماضي والحاضر والمستقبل).

(2) $PG\alpha$: كان (في زمن ما) الحال أنه سيكون دائماً الحال أن α.

(3) $FG\alpha$: سيكون(في زمن ما) الحال أنه سيكون دائماً الحال أن α. (أي أن: سيأتي الزمن الذي بعده α تكون دائماً هي الحال).

(4) $GF\alpha$: سيكون دائماً الحال أنه سيكون في زمن ما الحال أن α.

(5) $HF\alpha$: دائماً كان الحال أنه ستكون α.

(6) $PF\alpha$: كان (في زمن ما) الحال أنه سيكون الحال أن α.

(ب)

(1) $Q \wedge F \urcorner Q$

Q: أنت شاب.

(2) $Q \wedge G\, Q$

Q: أنا مخلص لك.

(3) $PQ \wedge PR$

Q: أحمد يقرأ رواية (خريف البطريق).

R: سليم يقرأ رواية (خريف البطريق).

(4) $P\,(Q \wedge PR)$

Q: خلود تدخل الغرفة.

R: علي يضع الشاي على النار.

(ج)

سنستخدم طريقة البرهان غير المباشر، حيث نفرض أن الصيغة خاطئة. إذاً، توجد لحظة زمنية، بحيث أن $V(\alpha,t) = 1$ و $V(HF\alpha, t) = 0$. وهكذا فحسب (3) من تعريف قيم صدق صيغ الزمن، فإنه توجد لحظة زمنية t' بحيث أن $t' R\, t, V(F\alpha, t') = 0$. ولكن حسب (2) من التعريف نفسه، فإن $V(\alpha, t'') = 0$، حيث $t' R\, t''$. الآن بما أن $t' R\, t$، فإن هذا يعني على وجه الخصوص، أن $V(\alpha, t) = 0$ وهذا أيضاً يناقض ما فرضناه أعلاه $V(\alpha, t) = 1$.

(د)

البرهان: سنستخدم طريقة البرهان غير المباشر، أي نفرض وجود عالم w، بحيث أن:

$V(O(A \rightarrow B), w) = 1$ و $V(OA, w) = 1$

بينما

$V(OB, w) = 0$

بما أن V(OB,w)=F، إذاً حسب القاعدة 1 من قواعد الصدق، يوجد عالم u حيث أن $w\delta u$ و V(B,u)=0. ولكن بما أن V(OA,w)=1 و $w\delta u$ ينتج أيضاً حسب القاعدة نفسها أن V(A,u)=1. وبما أن V(A,u)=1 وV(B,u)=0 فإذاً V(A→B,u)=0. والآن، بما أن $w\ \delta\ u$ ينتج حسب القاعدة المذكورة أن:

V(O(A→B,w)=0، ولكننا قلنا أعلاه إن V(O(A→B,w)=1 وهذا تناقض.

5.8 الفصل الثامن:

(أ)

1.	$\neg\neg P \rightarrow P, 0$
2.	0R0
3.	0R1
4.	$\neg\neg P, +1$
5.	$P, -1$
6.	1R1
7.	$\neg P, -1$
8.	1R2
9.	$P, +2$
10.	2R2, 0R2
11.	$\neg P, -2$
	.
	.
	.

الخطان (الصيغتان) 4 و5 اشتقا من 1 بتطبيق القاعدة ⊃ الكاذبة. الخط 7 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة النفي الصادق. الخط 9 اشتق من 7 بتطبيق قاعدة النفي الكاذب. الخط 11 اشتق من 4 بتطبيق قاعدة النفي الصادق.

نلاحظ أننا نفتح، في كل مرة، عالماً جديداً، i، الخط الرابع (وخاصية التعدي) تتطلب منا كتابة i - و¬P، ولكن هذا يتطلب فتح عالم جديد j حيث أن iRj و P, + j وهكذا الشجرة غير منتهية والصيغة خاطئة.

(ب)

(1) مبرهنة 6

$$K \supset L, K \supset (L \supset M) \vdash K \supset M$$

البرهان

1	$K \supset (L \supset M)$	م
2	$(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$	بديهية 3,
3	$K \supset (L \supset M)) \supset ((K \wedge L) \supset ((L \supset M) \wedge L))$	استبدال 2, $(K/\alpha),(L\supset M/\beta)$
4	$(K \wedge L) \supset ((L \supset M) \wedge L)$	الوضع 1,2
5	$(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \wedge \alpha)$	بديهية 2,
6	$((L \supset M) \wedge L) \supset ((L \wedge (L \supset M)$	استبدال 5, (M/β) $(L\supset M/\alpha)$
7	$(\alpha \wedge (\alpha \supset \beta)) \supset \beta$	بديهية 6,
8	$(L \wedge (L \supset M)) \supset M$	استبدال 7, $(M/\beta),(L/\alpha)$
9	$(K \wedge L) \supset M$	الوضع 4,6,8
10	$(\alpha \wedge \beta) \supset (\beta \supset \alpha)$	بديهية2
11	$(L \wedge K) \supset (K \wedge L)$	استبدال 10, $(K/\beta),(L/\alpha)$
12	$(L \wedge K) \supset M$	مبرهنة9,11,1
13	$(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$	بديهية 3
14	$(K \supset L) \supset ((K \wedge K) \supset ((L \wedge K))$	استبدال 13, $(K/\gamma)(L/\beta),(K/\alpha)$
15	$K \supset L$	م
16	$(K \wedge K) \supset (L \wedge K)$	الوضع 13,14
17	$\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$	بديهية1
18	$K \supset (K \wedge K)$	استبدال 17, (K/α)
19	$K \supset (L \wedge K)$	مبرهنة15,17,1
20	$K \supset M$	مبرهنة11,18,1

(2) مبرهنة 7

$$K \supset L, K \supset M \vdash K \supset (L \wedge M)$$

البرهان

1	$(\alpha \supset \beta) \supset ((\alpha \wedge \gamma) \supset (\beta \wedge \gamma))$	بديهية 3
2	$(K \supset L) \supset ((K \wedge M) \supset (L \wedge M))$	استبدال 2, $(K/\alpha),(L/\beta),(M/\gamma)$
3	$K \supset L$	م
4	$(K \wedge M) \supset (L \wedge M)$	الوضع 2,3
5	$(K \supset M) \supset ((K \wedge K) \supset (K \wedge M))$	اســــــــتبدال 1, $(K/\alpha),(L/\beta),(M/\gamma)$
6	$K \supset M$	م
7	$(K \wedge K) \supset (K \wedge M)$	الوضع 5,6
8	$\alpha \supset (\alpha \wedge \alpha)$	بديهية1
9	$K \supset (K \wedge K)$	استبدال $8, (K/\alpha)$
10	$K \supset (L \wedge M)$	مبرهنة4,7,9,1

5.9 الفصل التاسع:

(أ)

(**1**) في دلالة بوشفار:

K	$\neg K$	$K \vee \neg K$
T	F	T
F	T	T
I	I	I

يتبين من الجدول أن الصيغة (1) ليست تكرارية في دلالة بوشفار لامتلاكها القيمـة I.

في دلالة كلين:

K	$\neg K$	$K \vee \neg K$
T	F	T
F	T	T
I	I	I

هنا أيضاً الصيغة ليست تكرارية للسبب نفسه.

في دلالة لوكاتشيفيج:

K	$\neg K$	$K \vee \neg K$
T	F	T
F	T	T
I	I	I

هنا أيضاً الصيغة ليست تكرارية للسبب نفسه.

(6)

(**1**) في دلالة بوشفار:

K	L	$\neg K$	$\neg L$	$K \rightarrow L$	$\neg L \rightarrow \neg K$	$(K \rightarrow L) \rightarrow (\neg L \rightarrow \neg K)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	I	F	I	I	I	I
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	I	T	I	I	I	I
I	T	I	F	I	I	I
I	F	I	T	I	I	I
I	I	I	I	I	I	I

يتبين من الجدول أن الصيغة (6) ليست تكرارية في دلالة بوشفار لامتلاكها القيمة I.

في دلالة كلين:

K	L	$\neg K$	$\neg L$	$K \rightarrow L$	$\neg L \rightarrow \neg K$	$(K \rightarrow L) \rightarrow (\neg L \rightarrow \neg K)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	I	F	I	I	I	I
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	I	T	I	T	T	T
I	T	I	F	T	T	T
I	F	I	T	I	I	I
I	I	I	I	I	I	I

هنا أيضا الصيغة (6) ليست تكرارية للسبب نفسه.

في دلالة لوكاتشيفيج:

K	L	$\neg K$	$\neg L$	$K \rightarrow L$	$\neg L \rightarrow \neg K$	$(K \rightarrow L) \rightarrow (\neg L \rightarrow \neg K)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	I	F	I	I	I	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	I	T	I	T	T	T
I	T	I	F	T	T	T
I	F	I	T	I	I	T
I	I	I	I	T	T	T

الصيغة (6) هنا تكرارية لامتلاكها القيمة T فقط.

(ب)

(1) أنشئ جدول صدق الصيغة $(K \wedge (K \rightarrow L)) \rightarrow L$

فإذا كانت هذه الصيغة تكرارية في أي من الدلالات الثلاث فعندئذ يكون الوضع قاعدة اشتقاق صحيحة، وإذا لم تكن تكرارية فعندئذ يكون الوضع قاعدة اشتقاق خاطئة.

(2) أنشئ جدول صدق الصيغة $(\neg L \wedge (K \rightarrow L)) \rightarrow \neg K$

وتحقق من أنها تكرارية في الدلالات الثلاث.

بقيت فروع هذا التمرين تحل بالطريقة نفسها المبنية في (1) و (2) أعلاه.

(ج)

(1) المقدمات: $\neg(K \wedge L)$

النتيجة: $\neg K \vee \neg L$

في دلالة بوشفار:

سنحاول إعطاء مثال مضاد. نأخذ النتيجة $\neg K \vee \neg L$ كاذبة. إذاً K يجب أن تكون صادقة وL تكون صادقة. حتى تكون المقدمة $\neg(K \wedge L)$ صادقة فيجب أن تكون $K \wedge L$ كاذبة. وبما أن K صادقة فيجب أن تكون L كاذبة. ونصل هنا إلى تناقض، إذاً يفشل المثال المضاد وصورة الحجة صحيحة.

في دلالة كلين:

مطابق لما ذكر في دلالة بوشفار والشيء نفسه في دلالة لوكاتشيفيج.

(د)

$$
\begin{aligned}
V(\neg\alpha \wedge \neg\beta) &= \min (V(\neg\alpha), V(\neg\beta)) \\
&= \min (1 - V(\alpha), (1 - V(\beta)) \\
&= 1 - \max (V(\alpha), V(\beta)) \\
(\min (1 - x, 1 - y) &= 1 \max (x,y) \text{ :حسب الخاصية الجبرية}) \\
&= 1 - V (\alpha \vee \beta) \\
&= V (\neg(\alpha \vee \beta))
\end{aligned}
$$

(هـ)

$$
\begin{aligned}
V (\alpha \rightarrow \alpha) \quad &+ 1 = \min (V (\alpha), V (\alpha)) - V(\alpha) \\
&= 1 + V (\alpha) - V (\alpha) = 1
\end{aligned}
$$

10.10 الفصل العاشر:

(أ)

باستخدام:

$$\mu_{\bar{A}} (x) = 1 - \mu_A (x)$$

نجد أن:

$$\mu_{\bar{A}}(4) = 1 - \mu_A (4) = 1 - 1 = 0$$

$$\mu_{\bar{A}}(5) = 1 - \mu_A (5) = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$\mu_{\bar{A}}(6) = 1 - \mu_A (6) = 1 - 0.5 = 0.5$$

(ب)

		x_1	x_2	x_3
1	$\bar{A}$	0.9	0.4	0.3
	$\bar{B}$	0.1	0	0.9
2	$A \cup B$	0.9	1	0.7
3	$A \cap B$	0.1	0.6	0.1
4	$\bar{A} \cap A$	0.1	0.4	0.3
5	$\bar{A} \cup \bar{B}$	0.9	0.4	0.9
6	$\overline{A \cap B}$	0.9	0.4	0.9

(د)

Y	0	20	40	60	80	100	120	140
$\mu_{\text{ليس خطير}}(y)$	0	0.96	0.9	0.8	0.6	0.3	0	0
$\mu_{\text{خطير جدا}}(y)$	0	0.00	0.01	0.04	0.16	0.49	1	1
$\mu_{\text{خطير باعتدال}}(y)$	0	0.2	0.32	0.45	0.63	0.84	1	1

(هـ)

$\{(1,0) , (0.9, 0) , (0.8, 0.1) (0.7, 0.2), (0.6, 0.6), (0.5, 0.8)\}$ (1)

$\{(1,1) , (0.9,1) , (0.8, 0.81) , (0.7, 0.64), (0.6, 0.16) , (0.5, 0.04)\}$ (2)

$\{ (1,1) , (0.9,1) , (0.8,\sqrt{0.9}) , (0.7,\sqrt{0.8}), (0.\ 6,\sqrt{0.4}) , (0.5,\sqrt{0.2})\}$ (3)

المراجع

1. د. أسعد الجنابي - المنطق الرياضي التقليدي وغـير التقليـدي، دار ابـن خلـدون، الجزائر، 2001.
2. د. أسعد الجنابي - المنطق الرمزي المعاصر، دار الشروق، عمان، 2007.
3. د. صلاح عثمان - المنطق المتعدد القيم، منشأة المعارف، الإسكندرية، 2002.
4. Bojadziev, G.-Fuzzy ets, Fuzzy Logic, applications, World Scientific publishing Co., London, 1998.
5. Boneva, C. D. - Deduction, Blackwell publishing, USA, 2003.
6. Chellas, B.F.-Modal Logic: An Introduction, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
7. Dale, J.-Philosophy of mathematics, an Anthology, Blackwell publishers, Massachusetts, USA 2001.
8. Gamut, L.T.F.-Logic language and meaning, vol.2, the university of Chicago press, Chicago, 1991.
9. Ganchev, I.-Mathematical logic, Sofia, 1968.
10. Geoffrey, H.-Metalogic, university of California press, USA, 1996.
11. Girl, R.-Modal logic and philosophy, McGill-Queen’s university Press, Montreal & Kingston, 2000.
12. Goble, L.-Non-Philosophical Logic, Blackwell publishing, USA, 2002.
13. Grayling, A. C.-Philosophical logic, Blackwell publishers, Oxford, UK, 2002.
14. Haack, S.-Philosophy of logics, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
15. Haack, S.-Deviant Logic, Fuzzy Logic, The University of Chicago Press, Chicago, 1996.
16. Hajek, P.-Metamathematics of Fuzzy Logic, Kluwer Academic publishers, Dordrecths, Holland, 1998.

17. Hintikka, J.- Knowledge and Belief, Cornell University Press, Ithaca, New York; 1967.
18. Howson, L.-Logic with Trees, Routtedge, London, 2003.
19. Hughes, G.E. and Cresswell, M.J.-A new Introduction to Modal Logic, Routledge, London, 1996.
20. Jacquette, D.-Philosophy of logic, An Anthology, Blackwell publishing, USA, 2002.
21. Jacquette, D.-Philosophy of Mathana, An Anthology, Blackwell publishing, USA, 2002.
22. John, N.-Logics, Wadsworth, London, 1997.
23. Kosko, B.-Fuzzy thinking, Harper Collins publishers, London, 1994.
24. Lewis, D.-Counter Factuals, Blackwell publishing, Massachusetts, USA, 2001.
25. Lou, B.-Philosophical logic, Blackwell publishers, MA, USA, 2001.
26. Machover, M.- Set theory, logic and their limitations, Cambridge university press, Cambridge, UK, 2003.
27. Malinowski, G.-Many-Valued Logic's, Oxford University Press, New York, 1993.
28. Mark, S.-Logical forms, Blackwell publishers, Massachusetts, USA, 2001.
29. Mints, G.-A short Introduction to Modal Logic, Center for the Study of Language and Information, U.S.A, 1992.
30. Nguyen,H. and Walker E.A.-A first course in Fuzzy logic, Chapman & Hall/CRC, Florida, 2000.
31. Nolt, J. and Rohatyn, D.-Logic, MaGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
32. Priest, G.-Non-Classical logic, an Introduction to, Cambridge University Press, New York, 2001.
33. Prior, A.N.-Time and Modality, Oxford University Press, London, 1957.
34. Purtill, R,L,-Logic for philosophers, Harper and Row, publishers, New York , 1971.
35. Read, S.-Thinking about logic, An Introduction to the philosophy of logic, Oxford University Press, Oxford, 1995.

36. Rescher, N.-Many-Valued Logic, Modern Revivals in Philosophy Sciences, Hampshire, 1993.

37. Rubin, J.E.- Mathematical Logic, Saunders college publishing, 1990.

38. Sainsbury, M.-Logical Forms, Blackwell publishing, Ind. Ed., Oxford, 2001.

39. Schmitt, F.F.-Theories of Truth, Blackwell publishing, USA, 2004.

40. Tanaka, K.-An Introduction to Fuzzy Logic for Practical applications, Springer-Verlag, Berlin, 1996.



المنطق غير التقليدي وتطبيقاته

يمثل هذا الكتاب مدخلاً إلى المنطق غير التقليدي وتطبيقاته، كتوسيع للمنطق التقليدي (ثنائي القيم): فيدرس منطق الجهة (منطق الضرورة والإمكانية) باستخدام نماذج كريبكة وأشجار الصدق الموجّهة، وتبني الأنساق العادية لمنطق الجهة وهي K، T، S4، S5، B. وكتطبيقات لمنطق الجهة يدخل منطق الزمن والأخلاق؛ منطق المعرفة والاعتقاد، حيث تدخل مؤثراتها المناسبة، وتدرس دلالتها باستخدام نماذج كريبكة وأشجار الصدق الموجّهة أيضاً. تتم مناقشة الاستلزام الدقيق، ويبنى نسق صوري له. أما مضادات الواقع فتدرس دلالتها باستخدام النماذج نفسها.

يدرس المنطق الحدسي والمنطق متعدد القيم والمنطق المرن كبدائل للمنطق التقليدي، حيث يدخل المنطق الحدسي باستخدام أشجار الصدق الموجّهة المحوّرة، ويتم بناء أنساق صورية له. يعالَج المنطق ثلاثي القيم بواسطة دلالة لوكاتشيفتج، ودلالة بوشفار، ودلالة كلين. ويتم تعميمه إلى المنطق متعدد القيم. ويدرس المنطق المرن بالتفصيل كتعميم للمنطق اللانهائي القيم، حيث تدرس أولاً نظرية المجموعات المرنة التي هي أساس هذا المنطق، ثم تتم دراسة المفاهيم الأساسية للمنطق المرن.

تتوافر مجموعات من التمارين المتنوعة الكافية بعد كل فصل، أما حلولها فنجدها بالتفصيل في نهاية الكتاب لتساعد القارئ على تثبيت المعلومة النظرية.

يعد هذا الكتاب أول كتاب باللغة العربية يدرس المنطق غير التقليدي بشكل شامل ومبسط، ليكون عوناً لكل من طلبة الفلسفة والرياضيات وعلوم الحاسوب.

يطلب الكتاب على العنوان التالي: دار علاء الدين للنشر والطباعة والتوزيع - سورية - دمشق
ص.ب. ٣٠٥٩٨ - هاتف ٥٦١٧٠٧١ - فاكس ٥٦١٣٢٤١ - بريد إلكتروني ala-addin@mail.sy